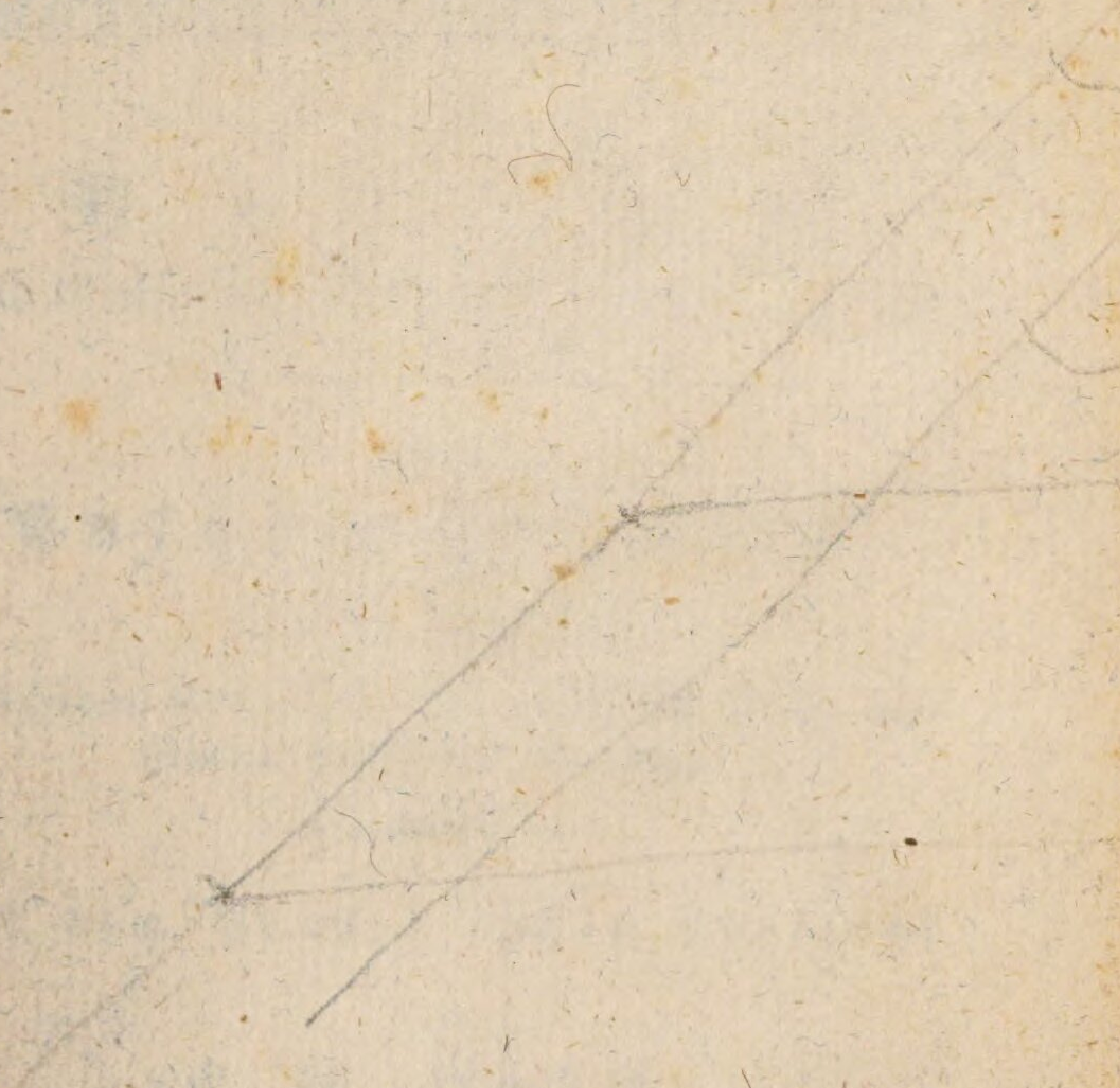
Math. Q. 268d



m̄

Mathem.
Geometr. Lacroix.
p. 273

Weitere Ausführung zu Lacroix's Geometrie

oder

Versuch

einer Geometrie über die ebnen und krummen Oberflächen,

nebst

Anfangsgründen

der Perspektive

zum besondern Gebrauch für Architekten, und für die ausübenden Meßkünstler überhaupt.

Aus dem Französischen übersetzt

von

E. M. Hahn,
Königl. Preuß. Kammer-Conducteur.

Mit 10 Kupfertafeln.

Staatsbibliothek München

Berlin 1806.
Bei Heinrich Frölich.

337.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Vorrede.

Der größte Theil der Anfangsgründe der Geometrie ist der Auflösung derjenigen Aufgaben gewidmet, die in den Eigenschaften, welche die in einerley Ebne gelegenen Linien zu einander haben, ihren Ursprung haben; und der übrige Theil enthält nur die Lehre von den Ebnen und dem Volumen der Körper. Indessen findet jede Aufgabe der Geometrie in einer Ebne genommen, oder von zweyen Dimensionen, eine ihr analoge im Raume; und der erste Zustand ist nur ein besondrer Fall vom zweyten.

Eine der einfachsten der in den Elementarbüchern aufgelösten Aufgaben hat zum Gegenstande,

den Mittelpunct und den Halbmesser eines durch drey gegebene Puncte gehenden Kreises zu bestimmen. Trägt man diese Aufgabe in den Raum über, so sieht man leicht, daß es nur darauf ankommt, den Mittelpunct und den Halbmesser einer Kugel anzugeben, wenn man vier Puncte kennt, durch welche sie gehen muß. Man kann durch ganz ähnliche Mittel die eine und die andre dieser Aufgaben auflösen; denn die Kugel ist nur eine Verallgemeinerung des Zirkels.

Es giebt indessen einen wesentlichen Unterschied zwischen den Operationen, welche die Auflösung der ersten Aufgabe erfordert, und denen, welche zu der der zweyten erforderlich sind, obgleich die einen und die andern auf einerley Principien gegründet sind. Beym Zirkel kann man nehmlich an den gegebenen Puncten die Operationen unmittelbar verrichten, weil sie in einer und derselben Ebne liegen; geht man aber zur Kugel über, so befinden sich diese Puncte in verschiedenen Ebnen; dasselbe gilt von den sie verbindenden Linien, von deren Betrachtung die ganze Auflösung abhängt; es ist daher unmöglich die in Betreff dieser Linien angezeigten Operationen auf dem Papiere zu verrichten.

Um dieser Schwierigkeit auszuweichen, muß man die gegebenen Stücke dergestalt umformen, daß nur die in einerley Ebne befindlichen mit einander verbunden werden, jedoch so daß der Uebergang von den alten zu den neuern möglichst einfach sey. Dieser Zweck wird durch die Methode der **Projectionen** vollkommen erreicht.

Aus dieser Auseinandersetzung ergiebt sich, daß die Anfangsgründe der Geometrie unvollständig sind, und in Ansehung der Ebnen und der Kugel einer eben solchen Ausdehnung bedürfen als sie in Betreff der geraden Linien und des Kreises haben. Indessen hat die Unentbehrlichkeit der Constructionen schon längst sehr fleißige Männer bewogen, sich mit Aufgaben der Geometrie zu beschäftigen, welche die drey Dimensionen betreffen, und deren Auflösung auf Betrachtungen in Rücksicht der Ebnen und der krummen Oberflächen beruht. Die Zimmerleute und die Steinschneider haben in dieser Art, die sie gleichsam geschaffen haben, Sachen entdeckt, die sowohl wegen ihrer Verwickelung als der Eleganz der Mittel, die sie zur Ueberwältigung der sich ihnen entgegensetzenden Schwierigkeiten anwendeten, erstaunenswürdig sind.

Ihre Ausübung ist in verschiedenen Werken gesammelt worden; allein nur wenige sind mit Beweisen versehen, und in allen überhaupt sind sie durch technische Ausdrücke der Zimmerleute und Steinschneider so verwickelt, daß man niemals die vorgelegte Aufgabe durch Entwickelung ihres Vortrags auf den letzten Grad der Abstraction, deren sie fähig ist, zurückgebracht sieht. Auch sind diese Werke beschwerlich zu lesen und geben kein Licht über die Art, die darin nicht abgehandelten Aufgaben aufzulösen.

Da die Künstler nur immer das Bedürfniß des Augenblicks beabzweckten, so haben sie auch fast immer bey jeder Aufgabe mit der sie sich beschäftigten, alle dazu nöthigen Vordersätze wiederholt. Sie scheinen nicht empfunden zu haben, daß die Auflösung einer jeden Aufgabe, zwey wesentlich verschiedene Theile enthält; der eine, rein theoretisch, besteht in der Anwendung oder Zuziehung einiger Vordersätze, von denen die gesuchte Auflösung abhängt; der andre enthält die Ausführung der Operationen, um zum Resultat zu gelangen; und diese Operationen an und für sich sind nur Resultate schon abgehandelter Aufgaben.

Um also die Lage des Mittelpunctes eines Kreises zu finden, welcher durch drey gegebene Puncte geht, so kann man, nachdem bewiesen worden, daß dieser Punct im Durchschnitte der senkrechten liegen muß, welche aus der Mitte der je zwey und zwey der gegebenen Puncte verbindenden Linien errichtet werden, die Aufgabe als aufgelöst betrachten; denn man hat nur noch nöthig, auf gegebene Linien senkrechte zu errichten, welches Verfahren keiner weitern Auseinandersetzung bedarf, weil es den Gegenstand einer der aufzulösenden vorhergehenden Aufgaben ausmacht.

Sollte man den Mittelpunct einer durch vier gegebene Puncte gehenden Kugel bestimmen, so kann man sich leicht überzeugen, daß wenn man je zwey und zwey dieser Puncte durch gerade Linien verbindet, die aus der Mitte dieser Linien errichteten senkrechten Ebnen nothwendigerweise durch den Mittelpunct der gesuchten Kugel gehen müssen; die Aufgabe würde also mit diesen wenigen Worten aufgelöst seyn, wenn vorher gelehrt worden wäre, wie man auf gerade Linien senkrechte Ebnen legt, und durch welches Verfahren man den Durchschnitt dieser Ebnen bestimmen kann.

Die Aufgaben der Geometrie haben überhaupt zum Gegenstande die Untersuchung eines oder mehrerer Puncte des Raums; und sie müssen als aufgelöst betrachtet werden, sobald man weiß auf welchen Linien oder auf welchen Flächen diese Puncte liegen, weil immer vorher ordnungsweise die verschiedenen Arten auseinander gesetzt sind, nach denen man Linien und Flächen unter gewissen Bedingungen construiren kann. Hierdurch werden die Aufgaben mit einander in Verbindung gebracht; der eingeführte Zusammenhang kommt dem Gedächtnisse des Studirenden zu Hülfe, indem ihm dadurch erlaubt wird, sich auf die schon erhaltenen Begriffe zu stützen, und, indem die Gegenstände, die seine Aufmerksamkeit stören könnten, auf die möglichst kleinste Anzahl reducirt werden; endlich werden die Figuren, indem sie von den Linien in Beziehung der Operationen, welche den vorhabenden vorher gehen, befreiet sind, weit einfacher ohne von ihrer Nützlichkeit und Allgemeinheit zu verlieren.

Es ist einleuchtend, daß eben dieser Weg in jeder Wissenschaft, und besonders in einem Zweige der Geometrie, befolgt werden muß. Wenn man sich

also mit Aufgaben beschäftigt, welche aus dem Verhältniß der Lage, der Größe oder der Gestalt entspringen, welche die Ebnen oder Flächen zu einander haben, so muß man die Aufgaben dergestalt ordnen, daß die Auflösung der ersten zu denen der folgenden dienen. Dieß habe ich zu thun versucht; und es ist leicht begreiflich, daß ich aus den Büchern der Steinschneider keinen Nutzen ziehen konnte, da die Geometrie darin nur beiläufig abgehandelt ist; ich gestehe selbst, daß es mir unmöglich war, ein einziges zu lesen. Ich habe mir daher vorgesetzt, in Betreff der Ebnen eine Reihe Elementaraufgaben aufzulösen, die denen, welche die Bücher der Geometrie in Betreff der Linien darbieten, analog sind. Die Zeit und die Mittheilung haben diese Aufgaben ergänzt, und ihnen die Form gegeben, unter welcher ich sie jetzt darstelle.

Ich habe getrachtet, meinem Gegenstande eine seiner Wichtigkeit angemessene Ausdehnung zu geben, so daß dieses Buch denjenigen brauchbar wäre, die sich auf die rein geometrische Kenntniß einschränken, und daß es auch zugleich dem Leser den Weg bahne, der sie auf die Künste anzuwen-

den sich vorsetzt; allein ich muß ihnen zum Voraus sagen, daß es in diesem Falle nicht hinreichend ist, den Gang der Auflösungen zu verfolgen. Man muß vielmehr das Lineal und den Zirkel zur Hand nehmen, die verschiedenen Operationen nach der Ordnung, in welcher sie fortgehen, vollziehen, und sich dieselben ganz eigen machen, um sie in den Fällen, wo sie als bekannt vorausgesetzt werden, ohne Schwierigkeit vollziehen zu können; denn ich glaubte nicht nur, daß es unnöthig, sondern auch den Regeln einer guten Methode angemessen sey, bey jeder Operation alle darin vorausgesetzte zu wiederholen. Dieß wäre eben so als wenn man in den Anfangsgründen der Arithmetik den Exempeln der Regel de tri die hierzu erforderliche Multiplication und Division beyfügte. Die von allen Linien der Construction überladenen Figuren sind den Kupfern eines Lehrbuchs der Geometrie eben das, was die kleinlichen Rechnungen den Beyspielen eines Lehrbuchs der Arithmetik sind. Wenn diese Beyspiele gut gewählt, in einer angemessenen Ordnung dargestellt, und sorgfältig aus einander gesetzt sind, so müssen sie in den Stand setzen, die verwickeltesten Rech-

nungen auszuführen, welche immer nur aus combinirten Elementaroperationen zusammengesetzt sind.

Die Hülfslinien in der Auflösung der Aufgaben, sind die Elementaroperationen; um alle Verwirrung zu vermeiden, lege man diese in Bley, und behalte nur diejenigen Linien bey, welche unmittelbar zum gesuchten Resultate führen.

Wenn ich die Geometrie lehre, suche ich immer die Zöglinge in der Construction der Figuren zu üben; und in dieser Absicht lege ich ihnen Aufgaben vor, wo die gegebenen, es sey daß sie durch bekannte Maaße gegeben sind, oder aus bestimmten Operationen hervorgehen, von einander abgesondert sind. Sie müssen alsdann fürs Erste diese Stücke wieder in ihre gegenseitige Lage bringen, welches nicht geschehen kann, wenn sie die Aufgaben nicht verstehen; alsdann müssen sie den Plan der Auflösung entwerfen und ihn ausführen, indem sie das anwenden was sie während des Unterrichts gehört haben. Ich habe immer gefunden, daß sie sich durch diesen Weg weit mehr vervollkommnet haben, als wenn man die detaillirte Construction der Aufgabe vor Augen legt. Die Symmetrie der Linien überhebt die Faulen,

welche allenthalben den größten Theil ausmachen, der Mühe, über die erhaltenen Lehren nachzudenken; und sie copiren ihre Construction, ohne sie zu verstehen.

Ich habe mich nicht allein darauf eingeschränkt, was die Ebnen und die runden Körper betrift, die einzigen, welche man in den Anfangsgründen der Geometrie betrachtet; sondern ich glaubte auch nächst denen, von welchen eben geredet worden, mit den einfachsten krummen Oberflächen bekannt machen zu müssen, welche in den construirenden Künsten von häufiger Anwendung sind. Ob nun gleich die Aufgaben in Beziehung auf diese Flächen auf Curven führen, die nicht zur Elementargeometrie gehören, so setzen doch diese, da sie immer nur durch Puncte construirt sind, und da man einzig und allein vom Lineal und Zirkel Gebrauch macht, keine der Elementargeometrie fremde Kenntnisse voraus und müssen folglich zu Ende dieser ihre Stelle finden.

Ich schließe mein Werk mit einigen allgemeinen Methoden, die Körper in Perspective zu setzen, und habe diesen Gegenstand nur kurz berührt, aus Gründen, die ich gleich angeben werde.

Die Perspective bietet demjenigen, welcher die Geometrie der Ebnen und krummen Oberflächen gut inne hat, nur eine einzige Aufgabe dar, deren Auflösung sich ihm sogleich darstellt als er den Vortrag derselben verstanden hat; und es ist beynahe unmöglich, sie dem Leser, welcher nur die Anfangsgründe der Elementargeometrie besitzt, vollständig zu lehren. Die Schwierigkeit besteht nicht darin, die technischen Verfahrungsarten der Perspective verständlich zu machen, das heißt diejenigen, welche dazu dienen, aus verschiedenen Puncten eines Körpers die Perspectiven dieser Puncte anzugeben, sondern nach der Stellung dieses Körpers oder nach der Empfindung, die man von seiner Form und dem Orte, den er einnimmt, hat, die gegenseitige Lage seiner merkwürdigsten Puncte gegen das Auge und gegen die Tafel anzugeben. Dieser letztere Theil nun ist keinesweges ein Gegenstand der Perspective, sondern schlägt gänzlich in die Geometrie der Ebnen und der krummen Oberflächen ein; und alle Lehrbücher, welche nicht die Kenntniß dieses Zweiges der Geometrie voraussetzen, oder welche ihn nicht auf eine methodische Art lehren, können nur als eine Sammlung

von Beyspielen angesehen werden, woselbst man die Verfahrungsarten, die Körper nach ihrer Definition zu construiren, und sie in Perspective zu sezzen, zusammen getragen findet. Dieses Gemenge von Methoden, welches der Deutlichkeit ihrer Auseinandersetzung sehr schädlich ist, ermüdet die unterrichteten Leser; das Buch dient den andern nur als ein Dictionnaire, worin sie mechanisch nachzuahmende Beyspiele suchen, und wenn sie nicht das sie Beschäftigende finden, wissen sie nicht, was anzufangen sey.

Ich konnte nicht zum Gegenstande haben, die Figuren zu vermehren, um einen Lehrbegriff der Perspective zu bilden, welcher den schon mit geometrischen Kenntnissen versehenen Personen brauchbar wäre; und was ich noch über diesen Gegenstand sagen könnte, wäre denjenigen überflüßig, welche mit dem übrigen Theil meines Werks vertraut sind. Ich habe mich daher darauf eingeschränkt ein Mittel anzugeben, in dem Falle wo man große Zeichnungen zu construiren hätte, und die vorzüglichsten Puncte derselben mit Genauigkeit bestimmen wollte, die Rechnung auf die Perspective anzuwenden. Dieses ist in der That alles

was man selbst in der Malerey thun kann; denn einige besondre von parallelen oder senkrechten Linien begränzte Körper ausgenommen, so wie die, welche man in der Architektur antrift, sind die Verfahrungsarten der Perspective so mühsam, daß man niemals den Muth haben würde, sie bey unregelmäßigen Umrissen in Ausübung zu bringen; man würde noch eher zur Natur und zu Modellen seine Zuflucht nehmen. Will man die Perspective ausüben, so muß man zuerst das Gefühl erlangen, weches den philosophischen Theil der Zeichenkunst ausmacht, der einzige, welcher allgemein nützlich, aber unglücklicherweise am meisten vernachläßigt ist; und da mich mein Gegenstand auf diese Behauptung führt, so sey es mir verstattet, sie durch einige Betrachtungeu über den Zweck zu unterstützen, den meines Erachtens der Unterricht der Zeichenkunst in den öffentlichen Schulen in Rücksicht auf den größten Theil der Zöglinge haben muß.

Die Menschen haben die Zeichenkunst ohne Zweifel von Seiten ihres brillantesten, aber auch des schwersten und ihren Bedürfnissen am wenigsten nützlichen Theils betrachtet; ich meine durch

die Nachahmung der lebendigen Natur und der Effecte der Leidenschaften auf dem Gesichte des Menschen. Bey dem Wiederaufblühen der Künste haben berühmte Künstler die Aufmerksamkeit ihrer Zeitgenossen durch ihre Meisterstücke gereizt, und einen Haufen Zöglinge an sich gezogen, die eifersüchtig waren, ihren Schritten zu folgen, und deren Erziehung sie nach dem Zwecke hinlenkten, den sie selbst erreicht hatten. Dieser Weg, der dem Gesichtspuncte dieser großen Künstler angemessen war, wurde ohne Unterschied von der ganzen Welt und ohne Rücksicht auf den verschiedenen Gebrauch, den man von der Zeichenkunst machen könnte, angenommen; alle junge Leute wurden so unterrichtet als wenn sie Maler werden sollten; und dieß ist eben so als wenn man, um die Zöglinge im Styl zu unterrichten, sie mit der Poesie anfangen ließe. Man könnte mir zwar zum Vortheil dieser Methode einwenden, daß, wenn man schwerere Sachen ausführen kann, die leichtern desto eher ausgeführt werden können; daß, wenn man Figuren zeichnen kann, alles übrige nur ein Spielwerk ist; aber man bedenkt nicht, wie viele Jahre dazu gehören, eine Figur zeichnen zu können, wenig-

nigstens nach allen ihren Erhabenheiten; denn nur wenn es der Zögling auf diesen Punct gebracht, kann man sagen, daß er eine Figur zeichnen kann. Eine Zeichnung copiren, in welcher man die Perspective schon gemacht, die Farben schon angesetzt findet, ist für den meisten Theil der construirenden Künste und der mechanischen Professionen ohne Nutzen. Man muß in diese allgemein angenommene Zeichnungen das übertragen, was die Zierlichkeit derselben ausmacht, und selbst wenn man Landschaften copirt, darf dies nicht fehlen. Die Kupferstecherkunst ist hinreichend, um die Copieen der vom Pinsel der genievollen Künstler hervorgebrachten Originale zu vermehren.

Wie sehr werden endlich nicht junge Leute durch die lange Weile, die sie empfinden, wenn sie sie ein Auge hinschmieren, das sie verstümmeln, einen Mund, den sie vom Gesichte abgesondert nicht erkennen können, vom Studium der Zeichenkunst entfernt, dessen Bedürfniß sie in der Folge fühlen.

Wir wollen nun auf gemeinnützigere Gegenstände zurückgehen, welche auch aus diesem Grunde für den meisten Theil der Zöglinge anziehender seyn

werden; lasset uns ihren Verstand mit ihrer Hand und ihren Augen zugleich üben, so daß ihnen das was sie vom ersten Eintritt in ihre Laufbahn unternehmen, zu irgend etwas dienlich seyn kann.

Die leblosen Gegenstände hat man am häufigsten Gelegenheit darzustellen. Dahin gehören Instrumente der Künste, Maschinen, Ausführungen der Constructionen, physicalische und chemische Apparate; alle diese sind aus geometrischen Körpern zusammen gesetzt oder können darauf zurück geführt werden; man muß daher mit diesen Körpern den Anfang machen, und mit desto mehr Recht, da sie einer strengen Ausführung und Zeichnung fähig sind, und sich daher der Zögling unter jedem Umstande seine Fehler selbst verbessern kann. Sie sind so einfach, daß man sie nach dem ersten Unterricht nach der Natur zeichnen, und Gelegenheit nehmen kann, zu zeigen, wie ihre Dimensionen sich verändern und combiniren, um die Lage ihrer Darstellung auf einer ebnen Fläche zu erhalten. Man übt also die Urtheilskraft und das Auge zugleich; besonders wenn man sich beym ersten Unterricht einige leicht zu construirende Maschinen zu Hülfe

nimmt, um die Erscheinungen der Perspective sinnlich zu machen. Dieses ist fürs Zeichnen.

In Ansehung der Schattirung, kann und muß das Spiel des Lichts auf die Körper nach Verhältniß der Neigung ihrer Flächen gegen den leuchtenden Körper, der Vertiefungen und Erhöhungen, welche sie darstellen, nach der Natur auf den vieleckigten Körpern, dem Cylinder, dem Kegel und der Kugel studirt werden. Nachdem die Erscheinungen auf diesen ersten Elementen der Körper wohl aufgefaßt sind, wird das Auge nun des Beobachtens gewohnt, leicht die Wirkung und die Ursache derjenigen erkennen, welche die zusammengesetzten Gegenstände darbieten. Um bey jeder Lection den Zögling zu üben und ihm Geschäfte zu geben, würde es nützlich seyn, vor seinen Augen von dem Körper welcher ihm zum Modell gedient hat, unter eben den Umständen als er ihn sehen sollte, eine genaue Zeichnung zu entwerfen. Es wird unleugbar, wenn man einen Cylinder, einen Kegel, eine Kugel zuerst von der Seite der Convexität und dann der Concavität gesehen, erleuchtet, die Hand dadurcheben so geübt, als wenn sie Erhöhungen und Vertiefungen copirt.

Nachdem man die regulären Körper zu behandeln gelernt, gehe man zu denen über, welche es nicht sind, in welchen man aber als Elemente des allgemeinen Effects die besondern Effecte wieder findet, welche man bey den ersten bemerkt hat; und wenn man genöthigt seyn sollte, bey diesem Puncte stehen zu bleiben, so hat man wenigstens sehen gelernt, und man wird im Stande seyn, viele Gegenstände so deutlich darzustellen, daß sie von allen Personen, die sie zu betrachten oder anzuwenden nöthig haben, werden erkannt werden. In dieser Rücksicht würde es sich mit dem Zeichnen, wie mit dem gewöhnlichen Schreiben verhalten; eine sehr geringe Anzahl Personen bringt es dahin, sie gut zu mahlen, und dieses ist hinreichend um die Buchstaben in ihrer Reinheit beyzubehalten; aber fast jedermann schreibt, oder muß so schreiben, daß es gelesen werden kann. Wenn es möglich wäre, und dieses ist, wie ich glaube, nur auf dem eben angezeigten Wege möglich, daß die Zeichenkunst so allgemein wie die Schreibekunst würde, von welcher sie eine Fortsetzung ist, so würden die mechanischen Künste unermeßliche Fortschritte machen. In der That, wie viele Entwürfe

sind nicht verloren gegangen, weil sie von ihrem Erfinder nicht zu Papier gebracht werden konnten; wie viele sinnreiche Mittel, welche auf Reisen oder sonst auf irgend eine Art bemerkt worden, konnten von demjenigen nicht aufgezeichnet werden, dessen Aufmerksamkeit sie auf sich gezogen haben.

Was die Leichtigkeit dieser Methode betrifft, nach derselben zu lehren, so haben mich einige gesehene Versuche überzeugt, daß sie sehr groß sey, und daß man auf diese Art die Zeichenkunst selbst in Rücksicht der Figuren sehr weit treiben könne. Um jedoch nicht den Künstlern zu nahe zu treten, so könnte man den besondern Schulen der Mahler und Bildhauer, den Unterricht in der Zeichenkunst, so wie sie es nehmen, überlassen, und den welchen ich an dessen Stelle in den allgemeinen Schulen zu geben vorschlage, könnte man unter dem Namen **Stereographie** vortragen, weil er die Kunst enthält, die Körper zu beschreiben.

Wenn die Gesichtspuncte, die ich vorschlage, den Vorwürfen der Neuerung, die man ihnen machen könnte, entgehen sollten, so wird man vielleicht sagen, wenn man sie mit den von der Zeit und dem Vorurtheile angenommenen Ideen ver-

gleicht, daß sie nicht neu sind; und um zu zeigen, daß ich es selbst nicht leugne, will ich einen Uebergang von Emil beybringen, über welchen ich immer erstaune, daß man so wenig Rücksicht darauf genommen hat.

„Um von der Ausdehnung und der Größe „der Körper richtig urtheilen zu können, lerne man „auch dieselben zeichnen, und selbst sie nachahmen; „denn im Grunde beruht diese Nachahmung lediglich auf den Gesetzen der Perspective und man „kann die Ausdehnung in ihren Perspectiven nur „dann schätzen, wenn man einige Empfindung von „diesen Gesetzen hat. Die Kinder, große Nach„ahmer, versuchen alle zu zeichnen; ich wollte, daß „auch das meinige diese Kunst ausübte; nicht ge„rade um der Kunst selbst willen, sondern um sich „ein richtiges Auge, und eine biegsame Hand zu „verschaffen; und überhaupt trägt es wenig bey, „daß man diese oder jene Uebung wisse, wenn man „nur die Ausbildung des Scharfsinns und die „Leichtigkeit des Körpers verlangt, welche diese Ue„bung mit sich führt (*). Ich werde mich daher

(*) Dieses muß von allen denen genau in Erwägung gezogen werden, welche sich mit dem öffentlichen Unterricht

„wohl hüten ihm einen Lehrer zu geben, der ihm „Nachahmungen nachzuahmen giebt, der ihn nur „nach Zeichnungen zeichnen ließe. Ich verlange „daß er die Originale selbst vor Augen habe, und „nicht das Papier welches sie darstellt; daß er ein „Haus nach einem Hause, einen Baum nach einem „Baume, einen Menschen nach einem Menschen „zeichne, um sich zu gewöhnen die Körper und „ihre Bilder richtig zu beobachten, und nicht un„richtige Nachahmungen für wahre zu halten. Ich „würde ihm sogar verweigern in Abwesenheit der „Gegenstände irgend etwas aus dem Gedächtnisse „zu zeichnen, bis sich durch öftere Betrachtung der„selben ihre Figur seinem Gedächtnisse wohl ein„geprägt hat; aus Furcht daß er, wenn er statt „der Wahrheit der Sachen, verzerrte und fantastische „Figuren setzt, die Kenntniß der Proportionen und „das Gefühl für die Schönheiten der Natur ver„lieren könnte."

(Emil zweytes Büch)

Es bleibt mir noch übrig, von der Einförmigkeit zu reden, die man zwischen dem größten

---

beschäftigen; denn der Zweck dieses Unterrichts ist oben deutlich vor Augen gelegt worden.

Theil meines Werks und den auf der Normalschule gegebenen Vorlesungen in Menge finden wird. Es konnte nicht fehlen, da dieser Geometer sich seit langer Zeit mit diesem Zweige der Mathematik beschäftigt, auf welchen er die Analysis mit gutem Erfolg angewendet hat. Man würde indessen Unrecht haben, daraus zu schließen, daß meine Arbeit aus der seinigen gezogen sey; denn es giebt Personen, welche schon lange vor der Bekanntmachung seiner Vorlesungen alle Materialien die ich beygebracht, von mir besitzen. Als mir der Unterricht in der descriptiven Geometrie auf der Normalschule ertheilt wurde, war ich darauf bedacht, sie in Ordnung zu bringen.

Inhalt.

Erste Abtheilung,

worin man die Ebnen und die Kugel betrachtet.

Vorläufige Begriffe. = = = = = Seite 1

Ein Punct ist in einer Ebne durch seine Entfernungen von zweyen der Lage nach bekannten Linien gegeben. 1

Verschiedene Arten irgend eine Anzahl im Raume gelegener Puncte darzustellen. = = = = = 4

Die Projection eines Punctes auf einer Ebne ist der Endpunct der von diesem Puncte auf die Ebne gefällten senkrechten. = = = = = = = = 6

Die Projection einer Geraden auf einer Ebne ist der Durchschnitt dieser Ebne mit einer andern, welche darauf senkrecht ist, und durch die vorgelegte Gerade geht. 9

Die Ebnen der Projectionen oder die coordinirten Ebnen sind diejenigen auf welche man projicirt, und die projicirenden Ebnen sind diejenigen, welche durch ihre

Durchschnitte mit den erstern die Projectionen der Linie bestimmen, welche sie enthalten. . Seite 10
Auf welche Art eine Linie durch ihre beyde Projectionen gegeben ist. 10
Eine Ebne ist gegeben, wenn man ihre Durchschnitte mit coordinirten Ebnen kennt. 11
Allgemeine in diesem Werke angenommene Bezeichnung, und die Art, alle Constructionen, welche im Raume geschehen sollten, auf ebne Constructionen zurück zuführen. 12
Von der Ebne und der geraden Linie . . . 14
Wenn eine Ebne auf einer der coordinirten Ebnen senkrecht ist, so braucht man zu ihrer Construction nur ihren Durchschnitt mit dieser Ebne zu kennen. . . 14
Eine in einer der coordinirten Ebnen gezogene Gerade ist zugleich die Projection aller Linien, welche man in der durch diese Gerade senkrecht auf der ersten Ebne geführten Ebne ziehen kann. 15
Bestimmung der Puncte, worinn eine im Raume gelegene Linie die coordinirten Ebnen trift. . . 16
In jeder Construction müssen die Ebnen als unbegränzt angesehen werden, und eine Gerade kann die horizontale Ebne hinter der verticalen, oder die verticale Ebne unterhalb der horizontalen treffen. . . . 17
Aufgabe. Wenn zwey Ebnen gegeben sind, die Projection ihres Durchschnitts zu finden. . . . 18
Anmerkung. Ueber die besondern Lagen, welche diese beyden Ebnen gegen die coordinirten Ebnen haben können. 20

Von dem Falle wo es nöthig ist eine dritte coordinirte Ebne anzubringen. 21

Aufgabe. Die Projectionen der Linie zu finden, welche durch zwey gegebene Puncte geht. . . . 21

Zusatz. Eine andere Art eine Linie im Raume anzugeben. 22

Zusatz. Von der Art die Lage eines auf einer gegebenen Geraden liegenden Punctes zu finden, wenn man seine Projection auf einer der coordinirten Ebnen kennt. 23

Anmerkung. Zwey Gerade können einander nicht immer schneiden, wenn sich auch ihre Projectionen auf jeder der coordinirten Ebnen schneiden; es ist hierzu noch nöthig, daß die beyden Durchschnitte der Projectionen in einer zugleich auf beyden coordinirten Ebnen senkrechten Ebne liegen. 23

Lehrsatz. Wenn zwey Linien im Raume parallel sind, so sind ihre Projectionen auf einer und derselben Ebne einander parallel. 24

Anmerkung. Wenn zwey Linien parallel seyn sollen, so müssen nothwendigerweise ihre Projectionen in zweyen verschiedenen Ebnen parallel seyn. . . 25

Aufgabe. Durch einen gegebenen Punct eine Linie zu führen, welche einer gegebenen parallel sey. . . 26

Aufgabe. Die Projectionen eines Punctes zu finden, wenn man drey Ebnen kennt, in deren jeder er liegen muß. 26

Anmerkung. Das Quadrat der Entfernung irgend ei-

nes Punctes im Raume von dem worin sich die drei coordinirten Ebnen schneiden ist gleich der Summe der Quadrate des vorgelegten Punctes von jeder dieser Ebnen = = = = = = = = = 28

Aufgabe. Den Durchschnitt einer Ebne und einer geraden Linie zu finden. = = = = = = 29

Aufgabe Wenn man die gemeinschaftlichen Durchschnitte einer Ebne mit jeder der coordinirten Ebnen kennt, diese Ebne zu construiren, das heißt für jeden Punct der horizontalen Ebne die Höhe desjenigen zu finden, welcher ihm in der geneigten Ebne correspondirt. = = = = = = = = = 30

Bestimmung des Winkels den diese beyden Ebnen einschließen. = = = = = = = = 31

Anmerkung. Construction einer geneigten Ebne, wenn man den Winkel hat, den sie mit der horizontalen Ebne bildet, und ihren Durchschnitt mit dieser Ebne. 32

Aufgabe. Durch einen gegebenen Punct eine einer gegebenen Ebne parallele Ebne zu führen. = = 34

Lehrsatz. Eine Linie und eine Ebne sind wechselweise auf einander senkrecht, wenn die Projectionen der Linie auf der horizontalen und der verticalen Ebne respectiv auf den gemeinschaftlichen Durchschnitten der geneigten Ebne mit eben diesen Ebnen senkrecht sind 35

Aufgabe. Von einem gegebenen Puncte eine auf einer gegebenen Ebne senkrechte Linie zu fällen. = 36

Aufgabe. Durch einen gegebenen Punct ein auf einer gegebenen Geraden senkrechte Ebne zu legen. = 36

Anmerkung. Vermittelst dessen man zu einer andern Auflösung der obigen Aufgabe gelangt. = = Seite 38
Aufgabe. Durch drey gegebene Puncte eine Ebne zu legen. = = = = = = = = = 39
Zusatz. Von der Art das von den durch drey gegebene Puncte gezogenen Linien gebildete Dreyeck auf die horizontale Ebne zurück zu führen. = = = 41
Aufgabe. Wenn zwey Ebnen gegeben sind, den von ihnen gebildeten Winkel zu finden. = = = = 41
Aufgabe. Wenn eine Ebne nebst einer in dieser Ebne liegenden Geraden gegeben ist, durch diese Gerade eine zweyte Ebne zu legen, welche mit der ersten einen gegebenen Winkel einschließt. = = = = = 43
Aufgabe. Wenn man den Winkel kennt, welchen zwey gerade Linien mit einander einschließen, und den welchen jede derselben mit einer durch ihren Durchschnittspunct gezogenen verticalen Linie bildet, die Projection des ersten Winkels auf der horizontalen Ebne zu finden. = = = = = = = = = = 44
Aufgabe. Wenn zwey gerade Linien auf einer Ebne gegeben sind, durch ihren Durchschnittspunct eine dritte Gerade zu führen, welche mit jeder derselben einen gegebenen Winkel einschließt. = = = = 46
Zusatz. Worin einer der Flächenwinkel bestimmt wird, welche die durch die gegebenen und gesuchten Geraden gelegten Ebnen bilden. = = = = = = 48
Anmerkung. Die Möglichkeit des vorhergehenden

Satzes hört auf, wenn einer der drey gegebenen Winkel größer als die Summe der beyden andern ist. Seite 48
Aus demselben Satze zieht man die Auflösung der umgekehrten Aufgabe. 49
Lehnsatz. Wenn man aus irgend einem Puncte des gemeinschaftlichen Durchschnitts zweyer Ebnen auf jeder eine senkrechte Linie errichtet, so wird der von diesen Linien gebildete Winkel das Maas des von den vorgelegten Ebnen gebildeten Flächenwinkels seyn . 49
Lehrsatz. Wenn man aus dem Scheitel eines körperlichen Dreyecks auf jede seiner Seitenflächen eine senkrechte Linie errichtet, so werden die Ebnen, welche je zwey und zwey dieser Linien enthalten, ein neues körperliches Dreyeck bilden, in welchem die Winkel der Gränzen den Winkel der Seitenflächen des erstern, und umgekehrt die Winkel der Seitenflächen den Winkeln der Gränzen des erstern gleich seyn werden 50
Zusatz. Vermittelst des vorhergehenden Lehrsatzes ist es möglich ein körperliches Dreyeck zu construiren, wenn man die Winkel kennt, welche die Seitenflächen mit einander einschließen. 51
Aufgabe. Wenn man in einem körperlichen Dreyecke den Winkel kennt, welchen zwey Gränzen mit einander einschließen, und die Winkel, welche die sie enthaltende Seitenfläche mit jeder der beyden andern bildet, die Projection der dritten Gränze in ihrer Ebne zu finden; oder wenn man die Winkel kennt, welche zwey Ebnen mit der horizontalen Ebne bilden, und die Li-

nien, nach welcher sie dieselbe schneiden, die Projectionen ihres gemeinschaftlichen Durchschnitts zu finden. 52

Aufgabe. Wenn in einem körperlichen Dreyecke zwey Seitenflächen nebst dem von ihnen eingeschlossenen Winkel bekannt sind, die Zerlegung dieses körperlichen Dreyecks zu construiren. 54

Aufgabe. Wenn die Projectionen eines Punctes auf den coordinirten Ebnen bekannt sind, diesen Punct auf andre gegebene Ebnen zu projiciren. . . . 55

Erster Zusatz. Wie man eine Linie auf eine neue projicirende Ebne zurückführt. 57

Zweyter Zusatz, Wie man auf die ersten coordinirten Ebnen zurückkommt. 58

Aufgabe. Wenn zwey Ebnen nebst einer in einer derselben liegenden Geraden gegeben sind, durch die andre eine Linie zu führen, welche mit der ersten einen gegebenen Winkel bildet; oder wenn man die Projection eines Winkels und die Lage einer seiner Seiten kennt, die der andern zu finden. 58

Aufgabe, Wenn die Projectionen einer Geraden im Raume gegeben sind, eine Ebne zu legen, welche durch diese Gerade geht, und mit der horizontalen Ebne einen gegebenen Winkel einschließt. 60

Zusatz. Den Fall betreffend, wo die gesuchte Ebne den gegebenen Winkel mit irgend einer Ebne einschließt. 61

Aufgabe. Wenn zwey einander nicht schneidende Linien im Raume gegeben sind, ihre kürzeste Entfernung zu finden. 62

Lehrsatz. Die Summe der Quadrate der Cosinus der Winkel, welche eine Ebne mit dreyen andern auf einander senkrechten bildet, ist dem Quadrate des Halbmessers gleich. . . . . . . Seite 65

Lehnsatz. Der Flächeninhalt der horizontalen Projection einer auf einer geneigten Ebne gezogenen Figur verhält sich zum Flächeninhalt dieser Figur wie der Cosinus des Neigungswinkels beyder Ebnen sich zum Halbmesser verhält. 66

Zusatz. Die Summe der Quadrate der Projectionsflächen einer ebnen Figur ist gleich dem Quadrate des Flächeninhalts dieser Figur. 68

Anmerkung. Aus dem obigen Satze leitet man über die rechtwinklichten Teträdra einen Satz her, welcher dem vom rechtwinklichten Dreyecke bekannten analog ist. 69

Von der Kugel. 71

Aufgabe. Die Lage und Größe des Kreises zu finden, welcher der Durchschnitt einer gegebenen Kugel und einer gegebenen Ebne ist. 71

Lehrsatz. Die aus der Mitte einer zwey Puncte einer Kugel verbindenden Geraden auf derselben errichteten senkrechten Ebne geht durch den Mittelpunct. . 73

Aufgabe. Den Mittelpunct und den Halbmesser einer Kugel zu finden, wenn man vier Puncte kennt, durch welche sie gehen muß. 73

Aufgabe. Den Durchschnitt zweyer gegebenen Kugeln zu finden. 75

Erster Zusatz. Construction zweyer Puncte in denen drey Kugeln, von welchen je zwey einander schneiden, zusammen treffen können, oder das Verfahren die Projectionen eines Punctes zu finden, wenn man seine Entfernungen von dreyen andern gegebenen Punct. kennt. S. 76
Zweyter Zusatz. Construction einer dreyseitigen Pyramide, wenn man die sechs Seitenflächen kennt . 77
Aufgabe. Eine Ebne zu führen, welche eine Kugel in einem gegebenen Puncte berühre. 78
Anmerkung, in welcher die Mittel angegeben werden die Construction unter vielen Umständen zu vereinfachen 79
Aufgabe. Durch eine gegebene Linie eine Ebne zu legen, welche eine gegebene Kugel berühre. . . 81
Aufgabe. Eine Ebne zu führen, welche auf dreyen gegebenen Kugeln ruhen soll. 82
Anmerkung. nach welcher man den Punkt bestimmen kann, in welchem eine zwey Kreise zugleich berührende Gerade die ihre Mittelpuncte verbindende Linie trift. 84
Zusatz. worin bewiesen wird, daß die Durchschnittspuncte der je zweyen und zweyen von drey Kreisen gemeinschaftlichen Tangenten in einerley geraden Linie liegen. 85

Zweyte Abtheilung.

Von der Entstehung der Oberflächen. . 87
Von den Kegelflächen. 88
Von den cylindrischen Flächen. . . . 91
Von den Curven von gedoppelter Krümmung. 94
Von den durch Umdrehung entstehenden Flächen 97
Von den Durchschnitten der krummen Flächen. 99

Aufgabe. Den Durchschnitt eines Cylinders und einer Kugel zu construiren. = = = = Seite 101
Aufgabe. Die Projectionen des Durchschnitts einer Kugel und eines Kegels zu finden. = = = 104
Aufgabe. Den Durchschnitt zweyer Kegel zu construiren. = = = = = = = = = 106
Erster Zusatz. Den Durchschnitt eines Kegels und eines Cylinders betreffend. = = = = = 108
Zweyter Zusatz. In Betreff des Durchschnitts zweyer Cylinder. = = = = = = = = 108
Anmerkung in Beziehung auf die Vereinfachung der Constructionen, und Anwendung auf die Untersuchung des Durchschnitts zweyer geraden Cylinder. = 109
Aufgabe. Den Durchschnitt zweyer Umdrehungsflächen zu bestimmen, deren Axen in einerley Ebne liegen 111
Anmerkung. Anwendung auf die Bestimmung eines Punctes, 1) wenn man seine Entfernungen von dreyen gegebenen Geraden kennt. = = = = = 114
2) Wenn man die Winkel kennt, welche die von diesem Puncte nach dreyen gegebenen Puncten gezogenen Geraden mit der verticalen einschließen. = = = 115
3) Wenn man bie Winkel kennt, welche die von diesem Puncte nach dreyen gegebenen Puncten gezogenen Gesichtsstrahlen mit einander einschließen. = = 117
Anmerkung, in welcher die Anzahl der Auflösungen gegeben werden, deren die letztere Aufgabe unter gewissen Umständen fähig ist. = = = = = 118

Fortsetzung von der Entstehung der krummen Flächen. = = = = = = 119

Von der Fläche, welche erzeugt wird, wenn eine horizontale Linie unterworfen ist, wegen ihrer Bewegung beständig durch zwey gegebene Linien zu gehen. 119
Von der durch eine Gerade erzeugte Fläche, welche durch die successiven Durchschnitte einer beständig durch

eine und dieselbe verticale gehenden Ebne mit zweyen gegebenen Curven bestimmt wird. = = Seite 120
Von den Afterflächen, und der kegelförmigen Ecke des Wallis. = = = = = = = = 121
Von den zerlegbaren Flächen. = = = = = 124
Definition ihrer Wiederkehrungsgränze. = = = 126
Ringförmige Flächen. = = = = = = 128

Von der Zerlegung der Oberflächen. = 129

Aufgabe. Irgend einen Cylinder zu zerlegen. = 130
Zusatz. Zerlegung des geraden Cylinders. = = 131
Anmerkung über die Curve welche die Wendeltreppen bilden. = = = = = = = = = 132
Aufgabe. Die Zerlegung irgend einer Kegelfläche zu construiren. = = = = = = = = 135
Anmerkung über eine Vereinfachung des vorhergehenden Verfahrens. = = = = = = = = 136
Zusatz. Zerlegung der geraden Kegelfläche. = = 137
Anmerkung, über die zerlegbaren Flächen überhaupt. 138

Von den die krummen Flächen berührenden Ebnen. = = = = = = = 139

Aufgabe. Einem Cylinder eine Tangente zu führen. 141
Zusatz. Wie man einer Curve von gedoppelter Krümmung eine Tangente führt. = = = = = 141
Aufgabe. Einem Kegel eine berührende Ebne zu führen. = = = = = = = = = 143
Aufgabe. Einer durch Umdrehung entstandenen Fläche durch einen auf derselben genommenen Punct eine berührende Ebne zu führen. = = = = = 143
Allgemeine Anmerkung, über die Natur der Berührungspuncte der Flächen mit ihren berührenden Ebnen, und über die Natur ihrer Krümmung. = 144

Versuch über die Perspective. . . . 150

Von der Art nach welcher das Bild eines Gegenstandes auf einer Tafel erscheint. 150

Aufgabe. Auf einer ebnen Tafel, die irgend eine Lage hat, die Perspective eines gegebenen Punctes zu finden. 153

Anmerkung. Ueber die Bestimmung des perspectivischen Umfangs der Körper. 155

Anmerkung. Ueber die Perspective, wo das Auge unendlich weit entfernt ist. 157

Lehrsatz. Wenn man durch das Auge einer auf irgend eine Art gegen eine der Lage nach gegebene Tafel liegenden Geraden, eine Parallele führt, so gehört der Punct, worin diese Parallele die Tafel trifft zur Perspective der Geraden. 158

Anmerkung. Ueber die Anwendung des vorhergehenden Lehrsatzes auf die Bestimmung der Perspective einer Geraden. 158

Erster Zusatz. Die Perspectiven irgend einer Anzahl paralleler Linien gehen alle durch einen und denselben Punct. 159

Zweyter Zusatz. Die Perspectiven aller der Tafel parallelen Linien sind auch einander parallel. . . 159

Dritter Zusatz. Sehr einfache Methode Linien und Puncte in Perspective zu setzen. 160

Anmerkung über die Construction des **Tiefenmaaßstabes** und über dessen Gebrauch um die Gegenstände in Perspective zu setzen. 161

Allgemeine Anmerkung über die Perspective, die Schatten und die Gnomonik. 164

Wei=

Weitere Ausführung

der

Geometrie.

Erste Abtheilung,

worin die Ebnen und die Kugel abgehandelt werden.

Vorläufige Begriffe.

Ich werde zu Anfange die Art auseinander setzen, nach welcher man mit Hülfe verschiedener Ebnen die einzelnen Theile des Raums abbilden, und deren Dimensionen erkennen kann

§. 1.

Die Lage eines Punctes in einer Ebne ist gegeben, sobald man die Lage zweyer durch diesen Punct gehenden geraden Linien kennt, weil er nur in ihrem Durchschnitte liegen kann.

Hat man verschiedene Puncte anzugeben, so ist das gewöhnlichste Mittel, welches man bey den Constructionen anwendet, und welches am bequemsten zu seyn scheint, zwey auf einander senkrechte Linien

AB, AC Fig. 1 anzunehmen, auf welche man alle Puncte der Ebne zurückführt. So würde z. B. der Punct M der Lage nach gegeben seyn, wenn man seinen kleinsten Abstand von der Linie AB, und seine kleinste Entfernung von der Linie AC kennte. Denn wenn man AQ der erstern gleich nimmt, und QM zu AB paralell führt, so muß der gegebene Punct in dieser Linie liegen; gleichergestalt muß er auch in der zu AC paralellen PM anzutreffen seyn, welche von derselben um AP, als den Abstand des Punctes M von dieser erstern entfernt ist. Da nun der vorgelegte Punct den beyden Linien PM und QM gemein ist, so muß er in ihrem Durchschnitte M liegen.

Auf diese Art kann man einen Riß auf eine andre Ebne übertragen, wenn man Leitlinien, wie AB, AC einführt, und die Entfernungen der Puncte desselben von diesen Linien mißt; nur muß man diese Leitlinien außerhalb des Systems von Puncten annehmen, oder wenigstens anmerken, von welcher Seite derselben die zu bestimmenden Puncte zu liegen kommen.

§. 2.

Um die drey Dimensionen, oder um die Körper darzustellen, befolgt man eine der vorhergehenden ähnliche Methode, welche besonders von den Architecten gebraucht wird; es ist nehmlich die der Grundrisse, der Durchschnitte oder Profile und der Aufrisse, deren Grund auf Folgendem beruht.

Wenn ein Punct im Raume gegeben ist, so kann man von diesem Puncte auf eine Ebne eine senkrechte Linie herablassen, und den Durchschnittspunct der senkrechten mit dieser Ebne anmerken; dieser letztere Punct wird die Projection des erstern auf gedachter Ebne seyn. Die Länge des zwischen dem Puncte und der Ebne enthaltenen Theils der senkrechten, wird die Höhe des gegebenen Punctes über der Ebne genannt.

Um die Begriffe recht faßlich zu machen, wollen wir zuvörderst annehmen, daß man alle oberhalb einer horizontalen Ebne im Raume befindlichen Puncte, auf diese Ebne zurückführt; ihre Projectionen werden sich dann in den Puncten befinden, in welchen ein durch jeden dieser Puncte herabgelassenes Senkbley, gedachte horizontale Ebne schneiden wird; und die Längen dieser Faden, werden die Erhöhungen der vorgelegten Puncte über ihren Projectionen geben.

Man hat demnach nur nöthig, um einen derselben anzuzeigen, seine Projection auf der horizontalen Ebne anzumerken, und dann besonders dessen Höhe entweder dadurch anzuzeigen, daß man die Zahl ihres Längenmaßes nach einem gegebenen Maaßstaabe aufschreibt, oder daß man eine Linie festsetzt, um sie darzustellen.

Wenn man indessen viele Puncte auf diese Art darzustellen hätte, so würde die Menge der Zahlen oder der Linien, welche die Höhen anzuzeigen erforderlich wären, sehr verwickelt werden; zwar könnte

man alle auf eine einzige Linie tragen, welche alsdann der Maaßstab der Höhen werden könnte. Dieses Mittel kann öfters mit Nutzen angewendet werden; allein es hat den Nachtheil, daß die Höhen verschiedener Puncte zusammenfallen, ohne daß auf die besondre Lage ihrer Projectionen Rücksicht genommen wird. Wir wollen daher ein andres Mittel angeben, welches von diesen Mängeln befreyet ist.

§. 3.

Denkt man sich durch irgend eine Linie der horizontalen Ebne eine darauf senkrechte Ebne errichtet, und von jedem der im Raume gegebenen Puncte auf diese verticale Ebne eine senkrechte Linie errichtet, so wird diese durch ihren Durchschnitt mit dieser verticalen Ebne, in dieser eine zweyte Projection des gegebenen Punctes bestimmen, welche mit dem gegebenen Puncte in gleicher Höhe über der horizontalen Ebne liegen wird

Wenn z. B. BAC Fig. 2 die horizontale, DAB die durch die Linie AB geführte verticale Ebne vorstellt, und von dem im Raume gegebenen Punct M die senkrechte MM′ auf die horizontale Ebne gefällt wird, so wird deren Endpunct M′ die horizontale Projection des gegebenen Punctes seyn.

Führt man ferner aus dem Punct M die senkrechte MM″ auf die Ebne DAB, so wird der Punct M″ die senkrechte Projection eben desselben Punctes seyn.

Die beyden Linien MM′, MM″ liegen offenbar

in einerley Ebne, weil sie einander schneiden. Führt man in der horizontalen Ebne auf den gemeinschaftlichen Durchschnitt AB dieser Ebne mit der verticalen, die senkrechte M'*M*, so wird sie auf der letztern senkrecht stehen; sie muß also zu MM'' parallel seyn, und diese drey Linien müssen in einerley Ebne liegen, welche auf der verticalen und horizontalen Ebne zugleich senkrecht ist, weil sie auf deren gemeinschaftlichem Durchschnitte senkrecht steht, (Geom. §. 194, 208). Es ist klar daß *MM''* der MM' gleich ist, und daß folglich die verticale Projection M'' mit dem gegebenen Puncte M gleiche Höhe über der horizontalen Ebne hat.

Verfährt man auf eben die Art mit dem Puncte P, so wird man für seine beyden Projectionen P' und P'' erhalten, und man sieht, daß die verticalen Projectionen M'', P'' die Höhen der vorgelegten Puncte über der horizontalen Ebne angeben, indessen die Projectionen P', M' auf dieser letztern, die Entfernungen der vorgelegten Puncte von der verticalen Ebne bestimmen.

Diese Methode die im Raume gelegenen Puncte zu bestimmen, ist in den Künsten unter dem Nahmen der Projectionsmethode bekannt.

Um die Theile eines Gebäudes darzustellen, denkt sich der Architect eine horizontale Ebne, auf welche er die untere Gränze der verschiedenen Theile zurückführt, die dieses Gebäude ausmachen. Die aus dieser Operaton entstehende Zeichnung wird der Grundriß genannt, und er zeigt die gegenseitige Lage der

Projectionen von den vorzüglichsten Theilen des Gebäudes, welche auf die horizontale Ebne durch lothrechte Linien zurückgeführt sind.

Um die Lage der merkwürdigsten Puncte seines Gebäudes noch genauer zu bestimmen, denkt sich der Architect ferner durch eine im Grundrisse genommene Linie, eine auf demselben senkrechte und folglich verticale Ebne, auf welche er die Gegenstände in der Höhe zurückführt, in welcher sie über der horizontalen Ebne liegen; die hieraus erfolgende Figur wird der Durchschnitt oder das Profil genannt, wenn sie durch das Innere des Gebäudes geht, und der Aufriß, wenn sie nur die äußern Theile darstellt.

Das Profil so wie der Aufriß, geben die Erhöhungen eines jeden der darin befindlichen Puncte über der horizontalen Ebne, welche darin oder durch den Durchschnitt der Erdfläche mit der verticalen Ebne auf welcher man construirt hat, dargestellt ist; sie ist also nichts anders als die Zusammensetzung mehrerer merkwürdiger Puncte, welche auf eine verticale Ebne durch darauf senkrechte Linien projicirt sind.

Was die gegen das Profil und den Grundriß schief liegenden Dimensionen betrifft, so ist klar, daß sie darin nicht in ihrer wirklichen Länge dargestellt werden können, und diese letztere zu bestimmen, soll in dem Theile der Geometrie gelehrt werden, mit welchem wir uns beschäftigen.

Wir werden uns also vorstellen, daß man alle Puncte des Raums auf zwey auf einander senkrechte Ebnen zurückführt, unter welchen man sich eine

Mauer eines Zimmers, und den Fußboden derselben denken kann.

§. 4.

Dieses vorausgesetzt, so müssen, wenn man sich eine auf irgend eine Art im Raume liegende gerade Linie, und von jedem Puncte derselben auf eine der gewählten Ebenen, z. B. auf die horizontale BAC Fig. 3. herabgelassene senkrechte Linien denkt, alle diese senkrechten, wie MM′ in einerley Ebne liegen, weil sie alle einander parallel und durch eine und dieselbe gerade Linie gehen; und diese Ebne wird auf der horizontalen senkrecht seyn (Geom. §. 191, 207).

Der Durchschnitt M′N′ wird offenbar die Endpuncte aller herabgefällten senkrechten enthalten, und folglich die Projection auf der horizontalen Ebne, der gegebenen geraden Linie MN seyn.

Man kann sich von dem eben gesagten ein sinnliches Bild machen, wenn man im Zimmer einen unbiegsamen Drath befestigt, und von jedem Punct desselben ein Senkbley herabhängen läßt, bis es den Fußboden erreicht.

Wir wollen uns nun von jedem Puncte der vorgelegten Geraden Senkrechte MM″ auf die verticale Ebne BAD gefällt denken, so werden diese eine neue auf dieser letztern senkrechte Ebne bilden; beyde werden einander in M″N″, der Projection der vorgelegten Geraden auf der verticalen Ebne schneiden.

§. 5.

Die Ebnen auf welche man projicirt, wollen wir coordinirte Ebnen oder die Ebnen der Projectionen nennen. Diejenigen Ebnen, in denen die von jedem Puncte der Geraden auf jede der coordinirten Ebnen gefällten Senkrechten zu liegen kommen, sollen mit dem Namen der projicirenden Ebnen belegt werden.

Aus ihrer Entstehung folgt, daß sie beyde durch die vorgelegte gerade Linie gehen müssen, und daß diese letztere folglich in ihrem gemeinschaftlichen Durchschnitte liegt.

§. 6.

Hieraus fließt die Art, nach welcher eine gerade Linie bestimmt ist, sobald man ihre Projectionen auf den coordinirten Ebnen hat. Man muß nehmlich durch jede Projection der vorgelegten Geraden eine Ebne senkrecht auf der coordinirten denken, in welcher sich diese Projection befindet; und der gemeinschaftliche Durchschnitt dieser beyden Ebnen wird diese Linie bestimmen. Ueberhaupt wird, so wie man die Lage eines Punctes in einer Ebne kennt, wenn zwey Linien bekannt sind, die ihn enthalten, auch eine Linie im Raume bestimmt, sobald man zwey Ebnen kennt, in deren jeder sie liegen muß.

Wenn also M′N′ Fig. 4. die Projection einer im Raume gegebenen Linie auf der horizontalen Ebne, und MN″ ihre Projection auf der verticalen Ebne ist, so wird

wenn man sich von den beyden Ebnen G''M'N', F'MN'' die erste auf der horizontalen, und die andre auf der verticalen Ebne senkrecht denkt, ihr beyderseitiger Durchschnitt M'N die vorgelegte Gerade seyn.

§ 7.

Es bleibt uns nur noch übrig, die Mittel anzugeben, eine Ebne zu bestimmen. Man weiß, daß drey Puncte ihre Lage bestimmen, oder, welches auf eins hinaus kommt, daß zwei sich schneidende gerade Linien eine Ebne begränzen (Geom. §. 190) wir können also sagen, daß sie gegeben sey, so oft wir ihre gemeinschaftlichen Durchschnitte mit jeder der coordinirten Ebnen kennen, weil man alsdann zwey gerade Linien hat, durch deren jede sie gehen muß. Die Ebene E'GF'' Fig. 5. ist also durch ihre Durchschnitte G E' und G F'' mit den coordinirten Ebnen A B C und D A B, gegeben.

Um sich von der Lage der vorgelegten Ebne ein sinnliches Bild zu machen, darf man nur auf den Fußboden eines Zimmers eine Art von Dach gegen die Wand legen.

Wir werden alle andre Arten eine Ebne zu bestimmen, auf die vorhergehende zurückführen, nachdem wir uns sowohl über die Figuren als über die Sprache deutlicher erklärt haben werden, um den Leser in den Stand zu setzen sich die zu vollziehenden Operationen in ihrer natürlichen Lage vorstellen zu können.

§. 8.

Da es nothwendig ist diese ersten Begriffe recht zu fassen, so wird es dem Anfänger sehr nützlich seyn, sich die ersten Figuren aus Karten selbst zu verfertigen; und um ihnen dies zu erleichtern haben wir sie ausfüllen lassen.

Wenn man in der Folge zwey durch einen Strich verbundene Figuren von einem und demselben Gegenstande finden wird, so wird die eine perspectivisch sein, und die andre die wirkliche Construction, wie sie ausgeführt werden muß, anzeigen; in der erstern zeigen die punctirten Linien oder die punctirten Theile derselben diejenigen an, welche von Ebnen verdeckt sind, und welche man nur dann sehen kann, wenn man diese letztere durchsichtig annimmt.

Um die gegenseitige Lage der Theile einer Figur noch deutlicher abnehmen zu können, sind alle in der horizontalen Ebne befindlichen Puncte mit accentuirten Buchstaben bezeichnet: die mit zweien Accenten gehören zu Puncten in der verticalen Ebne; die cursiven Buchstaben bezeichnen Puncte des gemeinschaftlichen Durchschnitts beyder Ebnen; endlich sind die Puncte des Raums mit unaccentuirten Buchstaben bezeichnet.

Von dieser Art zu accentuiren nehmen wir die vier Buchstaben A, B, C, D aus, weil sie beständig bey den Linien stehen, welche die coordinirten Ebnen

begränzen, und daher keinen Irrthum veranlaßen können.

In der Figur der Construction sind immer die gegebnen Stücke und die Resultate durch ausgezogene Linien angedeutet, und die zur Auflösung erforderlichen Hülfslinien sind blos punctirt; die Buchstaben sind übrigens darin mit denen in der perspectivischen Figur einerley.

Bey den Constructionen bilden die beyden coordinirten Ebnen nur eine einzige; denn man nimmt immer an, daß sich die verticale Ebne um ihren gemeinschaftlichen Durchschnitt mit der horizontalen Ebne gedreht habe, bis sie in die Verlängerung dieser letztern gekommen ist, wie es Fig. 6 zeigt. Bey dieser Bewegung beschreibt jede auf der Umdrehungsaxe AB senkrechte Linie, wie *P*P″, eine auf dieser Axe senkrechte Ebne (Geom. §. 196); hieraus folgt, daß sie an dem gemeinschaftlichen Durchschnitt dieser Ebne mit der horizontalen anstoßen, und daß sie folglich in der Verlängerung von P′*P* liegen muß, welche die Axe AB im Puncte *P* unter einem rechten Winkel trifft.

Dieser Umstand verdient wohl erwogen zu werden; denn es folgt daraus, daß die beyden Projectionen eines und desselben Punctes in einer und derselben geraden Linie liegen müssen, welche auf der Linie, die in der Figur die horizontale von der verticalen Ebne absondert, senkrecht seyn muß.

Zur Erleichterung der Sprache werden wir immer, wenn es nicht Umstände verhindern, unter dem

Ausdruck der Horizontalen Ebne diejenige verstehen, auf welche die Puncte des Raums zuerst zurückgeführt sind; so daß jede auf dieser senkrechte Ebne eine verticale seyn wird; alle übrigen werden überhaupt geneigte Ebnen genannt.

Von unsern beyden Ebnen wird also eine horizontal und die andre vertical seyn; die Projectionen auf der erstern werden horizontale Projectionen genannt, und wirklich befinden sie sich auch in einer durch den Ausdruck horizontal angezeigten Lage; allein zur Abkürzung werden wir auch die an der verticalen Ebne gelegenen, verticale Projectionen nennen, ob sie gleich nicht immer vertical gerichtet sind; denn der Ausdruck vertical führt immer den Begriff einer auf der horizontalen Ebne senkrechten Geraden mit sich, und am häufigsten ist die verticale Projection irgend einer Linie gegen diese Ebne geneigt; allein man darf sich alsdann nur vorstellen, daß die Projection, von der die Rede ist, auf einer verticalen Ebne gemacht ist.

Von der Ebne und der geraden Linie.

§. 9.

Nach dem Vorhergehenden ist eine Ebne gegeben, sobald man ihre beyden Durchschnitte mit jeder der coordinirten Ebnen hat.

Wenn die vorgelegte Ebne auf der horizontalen senkrecht ist, so ist klar, daß ihr gemeinschaftlicher Durchschnitt mit der verticalen Ebne auf AB senk-

recht seyn wird (Geom. §. 208); folglich wird die durch die Linien N''*N*, *N*N' Fig. 7 bezeichnete Ebne auf der horizontalen Ebne ABC senkrecht seyn, weil ihr gemeinschaftlicher Durchschnitt N''*N* mit der verticalen Ebne auf AB senkrecht ist.

Die Ebne M''*M*M' *) ist auf der verticalen Ebne senkrecht, weil ihr gemeinschaftlicher Durchschnitt mit der horizontalen Ebne auf AB senkrecht ist.

§. 10.

Da die projicirenden Ebnen auf den ihnen zugehörigen coordinirten Ebnen senkrecht sind, so folgt hieraus, daß eine auf einer von den coordinirten Ebnen senkrechte Ebne als die projicirende Ebne aller darin befindlichen Geraden angesehen werden kann; es werden daher alle in der Ebne M''*M*M' liegenden geraden zur Projection auf der verticalen Ebne die Linie *M*M'' haben; aus eben dem Grunde wird die auf der horizontalen senkrechte Ebne N''*N*N', die projicirende Ebne aller darin befindlichen Geraden seyn, welche alle zur Projection auf der horizontalen Ebne die Linie *N*N' haben werden.

Hieraus folgt, daß eine und dieselbe auf einer

*) Da der Buchstabe *M* den beyden Durchschnitten der vorgelegten Ebne mit jeder der coordinirten gemein ist, so würde es überflüßig seyn, ihn zu wiederholen, und diese Ebne kann durch M'*M*M'' bezeichnet werden; dasselbe gilt von den ubrigen.

der coordinirten Ebnen genommene gerade Linie, die Projection einer unendlichen Anzahl gerader Linien seyn kann; nimmt man indessen beyde Projectionen zugleich, so können sie nur einer einzigen Geraden zukommen; in der That kann die Linie, deren Projectionen $M''M$ und MM' sind, nur aus dem Durchschnitt der beyden projicirenden Ebnen $M'MM'$, und $N''NN'$ erfolgen.

§. 11.

Die Puncte P'' und P' sind diejenigen, worin die vorgelegte Linie die horizontale und verticale Ebne schneidet. Denn da z. B. der Punct P'' im gemeinschaftlichen Durchschnitte MM'' einer der projicirenden Ebnen mit der verticalen Ebne befindlich ist, und zugleich im gemeinschaftlichen Durchschnitte NN'' der andern projicirenden Ebne mit derselben verticalen Ebne liegen muß, so muß er auch zugleich in der vorgelegten Linie, welche der gemeinschaftliche Durchschnitt beyder projicirenden Ebnen ist, und in der verticalen Ebne liegen. Man kann auf eben die Art über den Punct P' in Rücksicht der horizontalen Ebne schließen.

Hieraus ergiebt sich die Art, wie man, sobald man die Projectionen einer Linie kennt, den Punct finden kann, in welchem sich eine der coordinirten Ebnen trifft. Denn wenn wir durch den Punct M in welchem die verticale Projection MM'' die horizontale Ebne trifft, MM' auf AB senkrecht führen, so wird sie die horizontale Projection NN' in einem

Puncte P′ schneiden, welcher der Durchschnittspunct der vorgelegten geraden Linie mit der horizontalen Ebne seyn wird. Auf eben die Art würde man bey der verticalen Ebne verfahren.

Obgleich die verschiedenen Theile dieser Operation auf verschiedenen Ebnen vollzogen werden, so lassen sie sich gleichwohl durch folgendes Verfahren in einer einzigen verrichten.

Man denke sich, daß die Ebne DAB sich um die Linie AB gedreht habe bis sie in die Verlängerung der Ebne BAC gelangt ist; so wird keine der darin befindlichen Linien durch diese Umdrehung eine Aenderung leiden, und die darin angezeigten Operationen lassen sich eben so verrichten, als wenn sie aufgerichtet wären. Man kann sich hiervon leicht überzeugen, wenn man die über die erste Figur gemachten Schlüsse auf die zweyte anwendet.

§. 12. Anmerkung.

Es könnte sich zutragen, daß die Projectionen *MM″* und *NN′* eine solche Lage erhielten, wie es Fig. 8 zeigt; alsdann wird die auf der Linie AB errichtete senkrechte *NN″* die Projection auf der verticalen Ebne nicht im Theile BAD treffen können; das heißt die vorgelegte gerade Linie P′P″ wird unterhalb der horizontalen Ebne fortlaufen, und die verticale Ebne in einen unterhalb des gemeinschaftlichen Durchschnitts AB liegenden Punct P″ schneiden.

Ueberhaupt muß man in allen Constructionen

die Ebnen als unbegränzte betrachten; und stellt man sich vor, daß sich DAB um AB gedreht habe, so wird der obere Theil dieser Ebne auf ABE in der horizontalen Ebne fallen, und der untere Theil wird auf dem Raum BAC zu liegen kommen; man muß also den untern Theil der verticalen Ebne mit dem vordern Theil der horizontalen Ebne als auf einander liegend betrachten, und dasselbe gilt auch vom obern Theil der verticalen und dem hintern Theile der horizontalen Ebne. Es ist alsdann um so nöthiger die zur verticalen Ebne gehörigen Puncte von den in der horizontalen Ebne befindlichen, wie wir bisher gethan haben, durch ein besonderes Zeichen zu unterscheiden; bey dieser Sorgfalt kann kein Irrthum veranlaßt werden. Man sieht in dem angenommenen Beyspiele, daß der Punct P'', ob er gleich im Raume BAC (2te Fig.) liegt, dennoch als zur verticalen Ebne gehörig betrachtet werden muß.

Wenn die Linie nicht durch ihre beyden projicirenden Ebnen, sondern durch irgend zwey andre Ebnen gegeben wäre, so kann man ihren Durchschnitt auf folgende Art finden, welche immer den Durchschnitt zweyer Ebnen giebt.

§. 13. Aufgabe.

Wenn zwey Ebnen gegeben sind, die Projectionen der Linie zu finden, welche ihr gemeinschaftlicher Durchschnitt ist.

Man wird leicht einsehen, daß wenn die gemeinschaftlichen Durchschnitte der vorgelegten Ebnen

mit einer der coordinirten Ebnen einander schneiden, der Punct, worin dieses geschieht, den beyden vorgelegten Ebnen gemein seyn, und folglich zur gesuchten Linie gehören muß.

Es seyen also $M'MM''$, $N'NN''$ Fig. 9. die beyden vorgelegten Ebnen; es ist klar, daß der Punct P' derjenige ist, in welchem diese beyden Ebnen zu gleicher Zeit die horizontale Ebne BAC treffen; er ist also ein Punct der gesuchten Geraden. Der Punct Q'' gehört offenbar zum gemeinschaftlichen Durchschnitt beyder vorgelegten Ebnen mit der verticalen, und es wird daher auch dieser ein Puuct der gesuchten geraden seyn. Die Aufgabe wäre also darauf zurückgebracht, durch zwey gegebene Puncte eine gerade Linie zu führen. Nun ist klar, daß jede der Projectionen dieser Geraden durch die Projectionen der gegebenen Puncte in der Ebne gehen muß, worin sie sich befindet; der in der horizontalen Ebne liegende Punct P' hat keine andre Projection als sich selbst; die Projection des Punctes Q'' auf der horizontalen Ebne, welcher in der verticalen Ebne liegt, wird sich in dem durch die auf AB senkrechte $Q''Q$ bestimmten Puncte Q befinden; legt man also durch die Puncte P' und Q eine Gerade, so wird diese die horizontale Projection der gesuchten Linie seyn.

Wenn wir nun den Punct P' auf die verticale Ebne durch die auf dieser Ebne senkrechte $P'P$ zurückführen, so werden wir die beyden Puncte P und Q'' haben, durch welche die verticale Projection der gesuchten Geraden gehen muß.

§. 14. Anmerkung.

Wenn die Durchschnitte *NN'* und *MM'* Fig. 10. der vorgelegten Ebne mit einer der coordinirten, z. B. mit der horizontalen einander parallel wären, so würden beyde Ebnen einander in einer zur horizontalen Ebne parallelen Linie schneiden, von welcher man dann einen Punct, nehmlich den Punet P'' kennen würde. Es ist klar, daß diese Linie auch einem jeden der Durchschnitte *NN'*, *MM'* der vorgelegten Ebnen mit der horizontalen, parallel seyn würde; denn wenn das Gegentheil statt fände, so würden beyde erste in einem und demselben Puncte der dritten zusammen stoßen, und ihre gemeinschaftlichen Durchschnitte mit der letztern würden nicht parallel seyn können.

Die Aufgabe ist in diesem Falle darauf zurückgeführt, die Projectionen einer geraden Linie zu finden, welche durch einen gegebenen Punct geht, und einer andern bekannten Linie parallel ist; diese wollen wir sogleich auflösen.

Endlich könnte es sich zutragen daß die gemeinschaftlichen Durchschnitte der vorgelegten Ebnen weder in der einen noch in der andern der coordinirten Ebnen zusammenstoßen, und dieser Fall wird immer eintreten, wenn die vorgelegten Ebnen ihren gemeinschaftlichen Durchschnitt PP zu AB Fig. 11 parallel haben. Um in diesem Falle den Durchschnitt der vorgelegten Ebnen zu finden, muß man sie auf eine dritte zurückführen, welche man mehrerer Leichtigkeit wegen auf den beyden

ersten coordinirten Ebnen senkrecht annehmen kann. Wir wollen uns nicht dabey aufhalten, diesen Fall besonders aus einander zu setzen, weil man ihn in den ersten Operationen vermeiden kann, und es überdieß leichter seyn wird, ihn zu behandeln, nachdem man mit den folgenden Constructionen vertraut seyn wird.

§. 15.

Es ist leicht einzusehen, daß die vorgelegten Ebnen zu einander parallel seyn werden, wenn ihre gemeinschaftlichen Durchschnitte mit jeder der coordinirten Ebnen zu einander parallel sind, ohne daß sie es mit dem gemeinschaftlichen Durchschnitte dieser Ebnen zu seyn brauchen (Geom. 215).

§. 16. Aufgabe.

Die Projectionen einer Linie zu finden, welche durch zwey gegebene Puncte geht.

Wir haben in der vorhergehenden Aufgabe eine Linie durch zwey Puncte gehen lassen, von denen der eine in der horizontalen und der andre in der verticalen Ebne lag; wenn nun gleich die beyden gegebnen Puncte auf irgend eine Art im Raume liegen, so wird die Construction deshalb nicht anders seyn. Um nehmlich die Projectionen der Geraden zu finden, welche durch diese beyden Puncte geht, braucht man bloß in der verticalen Ebne durch die beyden verticalen Projectionen der vorgelegten Puncte eine gerade Linie zu führen, diese würde die verticale Projection der verlangten Linie seyn; eine

ähnliche Operation auf der horizontalen Ebne wird die horizontale Projection geben.

M', N' Fig. 12 sind die horizontalen Projectionen der auf der vorgelegten Geraden genommenen Puncte M, N, und M'', N'' sind ihre verticale Projectionen. Stellt man sich nun vor, die projicirende Ebne M N M' N', welche die vorgelegte gerade Linie enthält, drehe sich um ihren gemeinschaftlichen Durchschnittt M' N' mit der horizontalen Ebne, bis sie auf die letztere zu liegen kommt, so werden die Linien M' M, N' N, M N ihre Größe nicht ändern, und ihre vorige Lage gegen M' N' beybehalten. Hieraus folgt, daß man die wirkliche Entfernung der beyden vorgelegten Punkte von einander finden kann, wenn man auf die horizontale Projection M'N' die den Linien *MM''* und *NN''* gleichen senkrechten M'M und N'N errichtet.

Hierin liegt nun der Grund einer Methode, welche immer angewendet wird die wirklichen Dimensionen der Theile der Ausdehnung zu finden, und welche darin besteht, diese Theile auf die Ebne zu tragen, in welcher sie sich wirklich befinden, oder auf eine andre zu dieser parallelen Ebne.

§. 17. Zusatz.

Das Vorhergehende biethet uns ein Mittel dar eine im Raum gegebene Linie zu bezeichnen, welches in vielen Umständen sehr nützlich seyn kann. Es ist nehmlich dieß, sich die verticale Ebne als durch die Gerade gehend zu denken, und sie um die Projection

dieser Geraden auf der horizontalen Ebne so lange herumdrehen zu lassen, bis sie auf diese zu liegen kommt; denn man sieht leicht ein, daß alle Puncte der Linie MN gegen die der horizontalen Projection M'N' noch dieselbe Lage haben, die sie im Raume hatten.

Wollte man den Winkel finden, welchen diese Gerade mit ihrer horizontalen Projection einschließt, so dürfte man bloß M'N' und MN bis zu ihrem gemeinschaftlichen Durchschnitte verlängern, oder durch irgend einen Punct der M'N' zu MN eine parallele führen.

§. 18. Zusatz.

Wir ziehen ferner hieraus die Art, die Lage eines in einer Linie im Raume befindlichen Punctes zu finden, wenn man die Projection dieses Punctes auf einer der coordinirten Ebnen, z. B. auf der horizontalen, und überdieß die Projectionen der Geraden kennt: Es sey N' Fig. 12 die horizontale Projection des gesuchten Punctes; man fälle *NN'* senkrecht auf AB, und errichte auch *NN''* senkrecht auf diese Linie, so wird der Punct N'' die verticale Projection des gesuchten Punctes seyn, und *NN''* die Höhe desselben über der Ebne BAC. In der wirklichen Construction braucht man nur N'*N* bis zu ihrem Durchschnitte mit der verticalen Projection M''N'' der vorgelegten Geraden zu verlängern.

§. 19. Anmerkung.

Wenn die Projectionen zweyer Linien auf

einer und derselben coordinirten Ebne einander schneiden, so kann man keinesweges daraus schließen, daß auch die Linien selbst einander scheiden; denn im Raume verhält es sich ganz anders als in einer Ebne. In dieser letztern nehmlich müssen immer zwey Linien, welche nicht parallel sind, einander nothwendigerweise schneiden; im Raume hingegen können zwey Linien in ihrer Richtung sich durchkreuzen, ohne sich schneiden zu müssen, wenn z. B. die eine unter der andern, oder zur Seite der andern fortläuft.

Um nun zu bestimmen, ob ein Durchschnitt vorhanden ist, oder nicht, muß man untersuchen ob der Durchschnittspunct der horizontalen Projectionen und der der verticalen Projectionen Fig. 13 und 14 zu einem und demselben Puncte im Raume gehören können, d. h. ob diese beyden Puncte in einer und derselben auf AB senkrechten Linie liegen (§. 8); bey den Puncten P'' und Q', Fig. 13 ist dieses nicht der Fall; aber bey P'' und P' Fig. 14. Hieraus folgt, daß die beyden im zweyten Exempel vorgestellten Linien in einerley Ebne liegen, daß dies aber beym ersten nicht der Fall ist.

§. 20. Lehrsatz.

Wenn zwey Linien im Raume parallel sind, so sind ihre Projectionen auf einer und derselben Ebne ebenfalls einander parallel.

Denn, da die Linien NM' und QP' Fig. 15 nach der Annahme parallel sind, und die Linien NN'

und QQ′ welche auf einer und derselben coordinirten Ebne AB senkrecht stehen, es ebenfalls sind, so werden die projicirenden Ebnen M′NN′ und P′QQ′ ebenfalls einander parallel seyn (Geom. §. 215) und folglich die Ebne AB nach den zu einander parallelen Linien M′N′ und P′Q′ schneiden. Es ist überdieß offenbar, daß diese Geraden die Projectionen der vorgelegten Geraden M′N und P′Q sind.

Umgekehrt müssen, wenn die Projectionen zweyer Geraden in jeder der coordinirten Ebnen parallel sind, diese beyden Geraden im Raume parallel seyn; denn, da die beyden projicirenden Ebnen einer jeden dieser Geraden auf einerley coordinirten Ebnen nothwendigerweise einander parallel seyn müssen; so folgt, daß die beyden projicirenden Ebnen der andern coordinirten Ebne, welche aus demselben Grunde einander parallel seyn müssen, gegen die erste eine solche Lage erhalten werden, daß sie durch ihren Durchschnitt mit derselben die Seitenflächen eines Parallelepipedums bilden werden.

§. 21. Anmerkung.

Es ist beyläufig zu merken, daß der Parallelismus der beyden vorgelegten Geraden nicht statt haben könnte, wofern nicht ihre Projectionen in jeder coordinirten Ebne einander parallel wären; denn sie könnten es bloß auf einer derselben seyn, und dieses würde weiter nichts beweisen als daß jede der Geraden umgekehrt mit der projicirenden Ebne der andern parallel wären. In der That kann man, wenn

zwey Gerade nicht in einerley Ebne liegen, durch jede derselben nur eine einzige zur andern Geraden parallele Ebne führen; und um sie zu bestimmen, braucht man nur durch irgend einen Punct der ersten eine zur zweyten parallele Linie zu denken; die durch diese neue und durch die erste Linie gehende Ebne wird die gesuchte seyn (Geom. §. 216).

Aus dem Vorhergehenden folgt, daß, wenn zwey Linien im Raume einander parallel seyn sollen, jede derselben mit zweyen Ebnen parallel seyn muß, welche es nicht zu einander sind, und daß alsdann jede dieser Linien mit allen Ebnen parallel seyn wird, welche durch die andre geführt werden können.

§. 22. Aufgabe.

Durch einen gegebenen Punct eine Linie zu ziehen, welche einer gegebenen Linie parallel sey.

Man muß durch die Projectionen des vorgelegten Punctes in jeder coordinirten Ebne zur Projection der vorgelegten Geraden in dieser Ebne eine Parallele ziehen, und man wird auf diese Art die Projection der gesuchten Geraden auf jeder coordinirten Ebne finden.

P′ uud P″ Fig. 16 sind die Projectionen des gegebenen Punctes; N′M′, N″M″ sind die der gegebenen Geraden; mithin werden L′H′ und L″H″ die der gesuchten Geraden seyn.

§. 23. Aufgabe.

Die Projectionen eines Punctes zu finden, wenn

man drey Ebnen kennt, in deren jeder er liegen muß.

Wir haben gesehen, daß ein Punct gegeben wäre, wenn man seine Projection auf der horizontalen und auf der verticalen Ebne hätte; es ist aber auch ein Punct gegeben, wenn man drey Ebnen hat, welche ihn enthalten. Um alsdann die Projectionen desselben zu finden suche man zuvörderst die des gemeinschaftlichen Durchschnitts irgend zweyer der vorgelegten Ebnen; wenn diese Linie von der dritten Ebne geschnitten wird, so giebt ihr Durchschnitt den gesuchten Punct.

Man würde zu demselben Resultate gelangen, wenn man den Durchschnitt einer der beyden ersten Ebnen mit der dritten suchte, man würde hierdurch eine zweyte Gerade erhalten, welche mit der ersten in einerley Ebne liegt; nach dem was im Vorhergehenden gelehrt worden, kann man den Durchschnitt dieser beyden Linien finden.

Wir werden uns nicht ins Detail dieser verschiedenen Operationen einlassen, weil sie keine Schwierigkeit haben, wenn man sie, wie bey jeder derselben gelehrt worden, successiv vollzieht. Man kann diese Arbeit erleichtern, wenn man alle Linien der Construction in Bley anlegt, und nur die Resultate auszieht; wenn jede dieser Operationen beendigt ist, läßt man die sich darauf beziehenden Linien hinweg, und die Figur ist alsdann nicht zu verwickelt.

§. 24. Anmerkung.

Die einfachste Art, die Lage eines Punctes vermittelst dreyer Ebnen zu bestimmen ist die, diese Ebnen senkrecht auf einander anzunehmen, und dies kommt darauf hinaus die Entfernungen des vorgelegten Punctes von dreyen andern zu den vorigen parallelen Ebnen anzugeben.

Denn wenn man sich die drey Ebnen BAC, BAD und CAD Fig. 17. senkrecht auf einander denkt, und man weiß, daß ein Punct im Raume M, von der ersten um den Abstand MM′, von der zweyten um MM″ und von der dritten um MM‴ entfernt ist, so folgt aus der Eigenschaft zweyer parallelen Ebnen, in allen ihren Puncten gleichweit von einander entfernt zu seyn, daß, wenn man in den gegebenen Entfernungen die Ebnen M‴MM″, M‴MM′, M″MM′ legt, welche respectiv jeder der Ebnen BAC, BAD und DAC parallel sind, der vorgelegte Punct in ihrem gemeinschaftlichen Durchschnitte liegen muß.

Die Ebnen M‴MM″, M‴MM′, M″MM′ bilden mit den coordinirten Ebnen BAC, BAD, DAB ein rechtwinklichtes Parallelepipedum. Zieht man die Diagonale in der horizontalen Fläche, so hat man, wie bekannt ist

$$\overline{AM'}^2 = \overline{MM'}^2 + \overline{AM}^2;$$

allein wegen der Parallelen ist MM' gleich der MM″, und AM der M‴M; mithin hat man

$$\overline{AM'}^2 = \overline{MM''}^2 + \overline{MM'''}^2$$

die innere vom Durchschnittspuncte der drey coordinirten Ebnen nach dem vorgelegten Puncte gezogene Diagonallinie AM ist offenbar die Hypothenuse eines rechtwinklichten Dreyecks AM′M, und folglich

$$\overline{AM}^2 = \overline{AM'}^2 + \overline{MM'}^2;$$

Setzt man statt AM′ den oben dafür gefundenen Werth, so wird daraus folgen

$$\overline{AM}^2 = \overline{MM'}^2 + \overline{MM''}^2 + \overline{MM'''}^2.$$

Dieses lehrt uns, daß das Quadrat der Entfernung irgend eines Punctes im Raume von dem, in welchem sich die drey coordinirten Ebnen schneiden, der Summe der Quadrate der Entfernungen dieses Punctes von jeder dieser coordinirten Ebnen gleich ist.

Drey sich schneidende Ebnen bilden acht körperliche Ecken, in deren jeder man einen ähnlich liegenden Punct finden kann; giebt man indessen an von welcher Seite dieser Ebnen der Punct liegen soll, so wird die körperliche Ecke welche man betrachtet, besonders bestimmt.

Wenn ein Punct durch eine Ebne und eine gerade Linie gegeben ist, so ist dies eben so viel als wenn er durch drey Ebnen gegeben wäre; denn man muß statt der gegebenen Linie ihre beyden Projectionen anwenden.

§. 25. Aufgabe.

Den Durchschnitt einer Ebne und einer geraden Linie zu finden.

Man suche den Durchschnitt einer der projicirenden Ebnen der vorgelegten geraden Linie mit der vorgelegten Ebne; da sich dann die hieraus erfolgende Linie zu gleicher Zeit in einer jeden dieser Ebnen befindet, so wird sie die vorgelegte Linie in dem Puncte treffen, in welchem diese die vorgelegte Ebne schneidet.

Alle diese Operationen lassen sich nach dem was im §. 13 gelehrt worden, leicht vollziehen; N″OM′ Fig. 18 stellt die gegebene Ebne vor; QQ″ und *N* M′ sind die Projectionen der Geraden, deren Durchschnitt mit dieser Ebne gesucht wird; mithin ist N″ *N* M′ eine ihrer projicirenden Ebnen, nehmlich die, welche auf der horizontalen Ebne senkrecht ist; M′ und N″ sind zwey Puncte des gemeinschaftlichen Durchschnitts dieser Ebne mit der gegebnen Ebne; N″ *M* ist also die Projection des Durchschnitts dieser Ebnen auf der verticalen Ebne, und P″ die Projection des Durchschnitts der eben bestimmten Linie mit der vorgelegten, auf derselben Ebne, oder welche auf eins hinauskommt, die Projection des Durchschnitts der gegebenen Ebne mit dieser letztern.

Zieht man P″ P′ senkrecht auf AB, so wird diese auf *N* M′ den Punct P′, als die horizontale Projection des gegebenen Punctes bestimmen.

§. 26. Aufgabe.

Wenn man die gemeinschaftlichen Durchschnitte einer Ebne G′ *G* N″ Fig. 19. mit jeder der coor-

dinirten Ebnen kennt, diese Ebne zu construiren, das heißt für jeden Punct der horizontalen Ebne die Höhe des ihm correspondirenden Punctes in der geneigten Ebne zu finden.

Wir wollen uns die vorgelegte Ebne durch verticale Ebnen, welche ihrem gemeinschaftlichen Durchschnitte mit der horizontalen Ebne parallel sind, geschnitten denken; man braucht dann nur durch die Projection des Punctes, dessen Höhe man wissen will, ein verticale Ebne zu legen, und ihren gemeinschaftlichen Durchschnitt mit der horizontalen Ebne zu construiren. Es sey M′ die Projection des gesuchten Punctes; es ist offenbar, daß M′ *N* zu G′ *G* parallel geführt den gemeinschaftlichen Durchschnitt der dieser geraden parallelen verticalen Ebne mit der horizontalen geben wird, und errichtet man *N*N″ senkrecht auf AB, so wird man (§ 13 und 14) den Punct N″ haben, in welchem die Linie M N″ als der Durchschnitt der ersten mit der vorgelegten Ebne, die coordinirte Ebne DAB trifft. Da aber diese Linie der Ebne ABC parallel ist, so wird die Höhe aller ihrer Puncte über dieser Ebne beständig und durch *M* N″ bestimmt seyn.

Führt man N″ M″ parallel zu AB, und M′ M″ auf diese Linie senkrecht, so wird der Punct M″ die Projection des gesuchten Punctes auf der verticalen Ebne seyn.

§. 27.

Um den Winkel zu erhalten, welchen die geneig-

te Ebne $G'GN''$ mit der horizontalen Ebne BAC einschließt, denke man sich vom Puncte M' in der horizontalen Ebne, und dem ihm correspondirenden Punct M in der geneigten Ebne, auf ihren gemeinschaftlichen Durchschnitt $G'G$ senkrechte Linien gefällt; sie werden das rechtwinklichte Dreyeck $M'G'M$ bilden, in welchem man $G'M'$ und $M'M$ kennt, und welches man folglich construiren kann: der Winkel $M'G'M$ wird der gesuchte seyn.

§. 28. Anmerkung.

Kennt man den Winkel $M'G'M$ und den gemeinschaftlichen Durchschnitt $G'G$ der vorgelegten Ebne mit der Ebne BAC, so könnte man erstern folgendermaßen construiren: durch den auf der horizontalen Ebne nach Belieben genommenen Punct M', führe man NM' zu $G'G$ parallel, und wenn man auf GG' die senkrechte $M'G'$ fällt, so würde man den Winkel $MG'M'$ dem gegebenen Winkel gleich machen; durch diese Operation würde die Höhe MM' des Punctes M über der horizontalen Ebne bestimmt seyn.

§. 29

Diese Art die Ebnen anzugeben ist von der vorhergehenden nicht verschieden; denn die horizontale Ebne bleibt alsdann dieselbe und die verticale Ebne findet sich auf dem gemeinschaftlichen Durchschnitt der horizontalen mit der geneigten Ebne

senk-

senkrecht; man nimmt also anstatt der coordinirten Ebne ABD die Ebne MG′M′

MG′ ist die Entfernung des Punctes M vom gemeinschaftlichen Durchschnitt der Ebne N″*G* ′ mit der horizontalen Ebne; und da sie auf *G*G′ senkrecht genommen ist, so folgt, daß wenn man die vorgelegte Ebne um diese letztere drehen läßt bis sie auf die horizontale Ebne zu liegen kommt, die Gerade G′M auf G′M′ zu liegen kommen wird (§ 8); der Punct M wird alsdann in m liegen. Verfährt man auf eben die Art bey allen Puncten, so würde man ihre gegenseitige Lage in der Ebne G′*G*N″ finden, welche sie alle enthält.

§. 30.

Wenn man den Winkel MG′M, und den gemeinschaftlichen Durchschnitt G′*G* wüßte, so würde man den Durchschnitt der geneigten mit der verticalen Ebne finden, wenn man durch irgend einen Punct M′ der auf dem gemeinschaftlichen Durchschnitte senkrechten Linie M′G′, zu diesem gemeischaftlichen Durchschnitte eine parallele führte, und durch den Punct N in welchem sie die verticale Ebne trifft, *N*N″ gleich M′M auf AB senkrecht errichtete; eine durch den dergestalt gefundenen Punct N″ und durch den Puuct *G* gelegte Gerade *G*N″ würde den gesuchten Durchschnitt geben. *)

*) Es ist leicht diese Construction auf die Untersuchung des Durchschnitts zweyer in einer zu AB parallelen Li=

§. 31. Aufgabe

Durch einen gegebenen Punct eine Ebne zu legen, welche einer gegebenen Ebne parallel sey.

Nach § 15 müssen die gemeinschaftlichen Durchschnitte der gesuchten Ebne mit den coordinirten Ebnen den Durchschnitten eben dieser Ebnen mit der gegebenen parallel seyn; es kommt also nur darauf an, einen Punct derselben zu finden, um sie führen zu können. Denkt man sich nun durch den gegebenen Punct eine gerade zum gemeinschaftlichen Durchschnitt der gesuchten Ebne mit der horizontalen Ebne parallele Linie gezogen, so wird sie gänzlich in der gesuchten Ebne liegen, und sie wird die verticale Ebne in einem Puncte treffen, welcher im gemeinschaftlichen Durchschnitt dieser beyden Ebnen liegen wird.

Um das Vorhergehende anzuwenden, sey MMM'' Fig. 20 die gegebne Ebne, P' und P'' die Projectionen des gegebenen Punctes; man führe P,*E* zu *MM*, parallel; errichteet man *E*E'' der *PP*'' gleich und parallel, so wird E'' der Durchschnittspunct der verticalen Ebne, und der durch den gegebenen Punct der M'*M* parallel geführten Linie seyn; er wird also zum gemeinschaftlichen Durchschnitt der gesuchten Ebne mit der verticalen Ebne DAB ge-

---

nie sich schneidenden Ebnen anzuwenden (siehe § 14); denn sie biethet ein Mittel dar die gegebenen Theile an eine andre verticale Ebne überzutragen als die, welche man zuerst für eine der coordinirten Ebnen gewählt hat

hören; und die durch den Punct E'' zu M''*M* parallel geführte N''*N* wird dieser gemeinschaftliche Durchschnitt seyn (§ 26).

Durch den Punct *N* würde man *N*N' der M*M*' parallel führen: diese würde der gemeinschaftliche Durchschnitt der gesuchten mit der horizontale Ebne seyn.

§. 32. Lehrsatz.

Eine Linie und eine Ebne sind weselweise auf einander senkrecht, wenn die Projectionen dieser Linie auf der horizontalen und auf der verticalen Ebne, respectiv auf den Durchschnitten der geneigten Ebne mit eben diesen Ebnen, senkrecht sind.

Denn die vorgelegte Linie und ihre Projection sind in einer und derselben Ebne, welche zu gleicher Zeit auf der coordinirten und auf der vorgelegten Ebne senkrecht ist; es sind also auch umgekehrt die vorgelegte Ebne und die coordinirte, auf welche man projicirt, auf der ersten senkrecht; ihr gemeinschaftlicher Durchschnitt wird also auf derselben, so wie auf allen durch dessen Erdpunct in derselben gezogenen Linien senkrecht seyn, und die Projection ist eine dieser Linien.

Wenn L'H Fig. 21. auf der geneigten Ebne M'*M*M'' senkrecht ist, so wird jede durch diese Gerade gehende Ebne auf jener senkrecht seyn; die projicirende Ebne L'HM' wird also diese Bedingung erfüllen; allein sie ist auch auf der horizontalen Ebne BAC senkrecht; es sind also diese letztere und die

geneigte Ebne zugleich auf derselben senkrecht. Ihr gemeinschaftlicher Durchschnitt *MM'* wird es also ebenfalls seyn, und auf alle durch dessen Endpunct in der projicirenden Ebne gezogene Linien senkrecht fallen; er wird also auf L'M'' der horizontalen Projection der Geraden L'H senkrecht seyn. Eben diese Betrachtungen lassen sich bey der verticalen Projection anstellen.

§. 33. Aufgabe.

Durch einen gegebenen Punct eine Linie zu ziehen welche auf einer gegebenen Ebne senkrecht sey.

Man muß von jeder der Projectionen dieses Punctes auf die gemeinschaftlichen Durchschnitte der vorgelegten Ebne mit den coordinirten Ebnen senkrechte Linien ziehen, und diese senkrechten werden die Projectionen der gesuchten Linie seyn.

Wenn L' und L'' Fig. 22 die Projectionen des gegebenen Punctes sind, so werden L''E'' und L'E' von denen die erste auf M''*M* und die andere auf *MM'* senkrecht ist, die Projectionen der gesuchten Linie seyn, welche durch den gegebenen Punct geht, und auf der Ebne M'*MM''* senkrecht sind.

§. 34. Aufgabe.

Durch einen gegebenen Punct eine Ebne zu legen; welche auf einer gegebenen Geraden senkrecht sey.

Es ist klar, daß die gemeinschaftlichen Durchschnitte der gesuchten Ebne mit jeder der coordinir-

ten Ebnen auf den Projectionen der gegebenen Geraden senkrecht seyn müssen. Denkt man sich nun eine, welche dieser Bedingnng ein Genüge thut, so wird es nur noch darauf ankommen, ihr durch den gegebenen Punct eine parallele zu führen.

Um diese Construction auszuführen, ziehe man durch P′ senkrecht auf FM′, welches die Projectionen des gegebenen Punctes und der geraden Linie sind, Fig. 23. die Gerade P′Q, welche dem gemeinschaftlichen Durchschnitt der gesuchten Ebne mit der horizontalen parallel seyn wird. Betrachtet man diese als die Projection auf der horizontalen Ebne einer ihr durch den gegebenen Punct parallel laufenden Linie, so wird man wie im §. 31. den Durchschnitt dieser letztern mit der verticalen Ebne construiren können, welcher in Q″ treffen wird; und führt man durch diesen Punct Q″*M* senkrecht auf EM″, so wird diese der gemeinschaftliche Durchschnitt der gesuchten Ebne mit der verticalen seyn. Die auf *FM′* senkrechte Linie *M*M′ wird ihr gemeinschaftlicher Durchschnitt mit der horizontalen Ebne seyn.

Wir wollen uns nicht dabey aufhalten den Punct zu bestimmen, in welchem die senkrechte die gegebene Ebne trifft; denn dieses kömmt darauf zurück den Durchschnitt einer Linie und einer Ebne zu finden, welche Aufgabe der § 25. auflößt: kennt man diesen Punct, so wie den, durch welchen die senkrechte geführt ist, so kann man die Länge derselben nach §. 16 finden.

§. 35. Anmerkung.

Die beyden vorhergehenden Aufgaben können auf eine sehr einfache Art angesetzt und aufgelöst werden, welche wohl zu merken ist.

In der ersten, wo es darauf ankommt durch einen gegebenen Punct auf eine gegebene Ebne eine senkrechte zu fällen, kann diese Ebne durch ihre Neigung gegen die horizontale Ebne und durch die Linie, nach welcher sie dieselbe schneidet, gegeben seyn.

Wenn also *L* Fig. 24. die Projection auf der horizontalen Ebne des Punctes ist, von welchem man eine senkrechte auf die Ebne M′*M*M″ fällen will, so muß man von diesem Puncte eine senkrechte *LM* auf die Gerade M′Mfällen; diese wird die horizontale Projection der gesuchten Linie seyn, welche an und für sich in der durch diese Projeetion errichteten verticalen Ebne liegen muß. Nimmt man diese für eine der coordinirten Ebnen, so kann man darin den Punct L″ construiren, welcher in einer Höhe *L*L″ über seiner Projection liegt, die der bekannten Höhe gleich ist; und setzt man L″ O″ senkrecht auf M″*M* so wird diese die verlangte Linie und zugleich die kürzeste Entfernung des gegebenen Punctes L″ von der Ebne M′*M*M″ seyn.

Wir wollen nun annehmen, eine Linie sey durch ihre horizontale Projection *L* M und durch ihre Lage gegen diese Projection in der vertiealen Ebne DAB gegeben, und man wollte durch einen gege-

benen Punct eine senkrechte Ebne darauf legen. Wenn P′ die Projection dieses Punctes auf der horizontalen Ebne ist, so construire man dessen verticale Projection P″, und wenn man P″O″ auf *Æ*L″ senkrecht errichtet, so wird man den gemeinschaftlichen Durchschnitt der verlangten Ebne mit der verticalen haben. Man errichte dann *M*M′ senkrecht auf E*M*; diese wird der gemeinschaftliche Durchschnitt dieser Ebne mit der horizontalen seyn.

§. 36. Aufgabe.

Durch drey gegebene Puncte eine Ebne zu legen.

Man muß die drey Puucte durch zwey gerade Linien verbinden, und die Durchschnitte einer jeden derselben mit einer der coordinirten Ebnen z. B. mit der horizontalen suchen; die auf diese Art gefundenen zwey Puncte werden den gemeinschaftlichen Durchschnitt der vorgelegten Ebne mit der horizontalen Ebne bestimmen. Es bleibt dann nur, noch eine Bedingung zu erfüllen übrig, nehmlich diese Ebne durch einen der gegebenen Puncte zu führen, wie dieß § 31 geschehen ist.

M′, N′, P′ Fig. 25. sind die Projectionen der drey gegebenen Puncte auf der horizontalen Ebne; M″, N″, P″ ihre Projectionen auf der verticalen Ebne; mithin haben die Linien, welche diese drey Puncte im Raume verbinden, und welche die gesuchte Ebne begränzen, zu ihren horizontalen Projectio-

nen $\left\{\begin{matrix}M'N'\\ M'P'\end{matrix}\right\}$, und zu ihren verticalen Projectionen $\left\{\begin{matrix}M''N''\\ M''P''\end{matrix}\right\}$; die Puncte E' und F' sind die Durchschnitte der beyden gegebenen Geraden mit der horizontalen Ebne, welche nach § 11 gefunden werden können; folglich ist $E'H$ der gemeinschafttiche Durchschnitt der gesuchten Ebne mit der horizontalen.

Um den gemeinschaftlichen Durchschnitt auf der verticalen Ebne zu finden, führe man nach §. 31 $M'G$ parallel zu $E'H$, und $G''G$ gleich MM'' senkrecht auf AB; die Punkte G'' und H werden den gemeinschaftlichen Durchschnitt auf der verticalen Ebne bestimmen.

§. 37.

Man kann dieselbe Aufgabe construiren, wenn man sich durch einen der gegebenen Puncte und jedem der beyden übrigen zwei verticalen Ebnen geführt denkt, und sie dann um die Linien, welche die horizontalen Projectionen der Puncte durch welche sie gehen, verbinden, solange herumdrehen läßt, bis sie an der horizontalen Ebne anschließen (§. 17.)

Man würde also die Linien MN und MP Fig. 26 so lange verlängern, bis sie ihre Projectionen auf der horizontalen Ebne treffen, welches die Puncte E und F' des gemeinschaftlichen Durchschnitts der gesuchten Ebne mit dieser geben wird.

Man sieht aus dem, was in §. 27 gelehrt worden, daß wenn man $G'M'$ senkrecht auf EF,

errichtet, und das rechtwinkelichte Dreyeck $G'M'M''$ construirt, in welchem $M''M'$ der $M'M$ gleich ist, der Winkel $M''C'M'$ die Neigung der gesuchten Ebne mit der horizontalen messen wird.

§. 38. Zusatz.

Es ist nicht minder klar, daß $F'M$ und $E'M$ die Entfernungen des Punctes M im Raume von jedem der Puncte F' und E' sind, in welchen diese Geraden die horizontale Ebne treffen; men kennt also die drey Seiten des durch den Punct M und diese letztere gebildeten Dreyecks, und man kann es construiren, wenn man es sich auf der horizontalen Ebne gelegt denkt, nachdem es sich um $F'E$ gedreht hat; es ist in der Figur in $F'mE'$ vorgestellt.

Man wird also den Winkel $F'mE$ haben, den die Linien $E'M$ und $F'M$ in ihrer wirklichen Lage einschließen.

Es ist beyläufig zu merken, daß wenn man die Ebne der Figur nach den Linien $E'M'$, $F'M'$ und $E'F$ herumdrehen läßt, sich alsdann die Dreyecke $E'M'M$, $F'M'M$ und $F'mE'$ durch einen ihrer Winkel im Puncte M vereinigen werden: sie werden alsdann eine Täträdrum bilden, von welchem diese Figur die Zerlegung zeigt.

§. 39. Aufgabe.

Wenn zwey Ebnen gegeben sind, den von ihnen eingeschlossenen Winkel zu finden.

Man weiß, daß der Winkel, welchen zwey Eb-

nen bilden von demjenigen gemessen wird, welchen zwey von einem uud demselben Puncte des gemeinschaftlichen Durchschnitts in jeder Ebne auf diesem Durchschnitt errichtete senkrechte, mit einander einschließen.

Es kommt also nur darauf an diese Linien zu construiren; nun begränzen sie eine auf dem Durchschnitt beyder vorgelegten Ebnen senkrechten Ebne; hieraus folgt, daß man, nachdem die Projectionen dieses Durchschnitts, wie im § 13. gefunden sind, durch einen auf dieser Linie willkührlich genommenen Punct eine senkrechte Ebne auf dieselbe führen muß, deren Durchschnitte mit jeder der vorgelegten Ebnen sich dann construiren lassen. Da sich diese beyden letztern Geraden in dem Puncte schneiden, durch welchen man die senkrechte Ebne gelegt hat, so wird es leicht seyn, nach dem vorhergehenden § deren Winkel zu finden, und dieser Winkel wird die Neigung beyder Ebnen messen.

Dieses ist das allgemeine Verfahren, welches man zur Auflösung der vorhergehendeu Aufgabe befolgen kann; es hängt nur von den schon aufgelösten Aufgaben ab. Man kann indessen die Anzahl der in der Construction vorkommenden Linien vermindern, wenn man den Punct wählt, durch welchen man die senkrechte Linie führt.

Wir hätten also das Detail einer Construction, welche mir Monge mitgethellt hat, und welche eine der einfachsten ist, die man für diesen Fall finden kann.

Wir wollen annehmen, daß die beyden gegebenen Ebnen $H' E F''$, $H' G F''$ und daß die Projection ihres gemeinschaftlichen Durchschnitts auf der horizontalen Ebne $H' F$ sey; ich construire in der durch diese Gerade gehenden verticalen Ebne den Durchschnitt der beyden gegebenen Ebnen, indem man $F F$ der FF'' gleich, auf FH' senkrecht errichtet; ich lege dann durch einen auf $H'F$ nach Belieben genommenen Puncte M' eine auf der Linie $F H'$ senkrechte Ebene (§. 35.); auf diese Art finde ich die Gerade $P M'$, welche der gemeinschaftliche Durchschnitt dieser Ebne und der verticalen Ebne $F F H'$ ist. Läßt man aber die erste um ihren gemeinschaftlichen Durchschnitt $L' N'$ mit der horizontalen Ebne drehen, so wird die auf $M' N'$ senkrechte Linie PM' nothwendiger Weise auf $H'M'$ fallen (§. 8), und der Punct P wird sich in P' befinden; das durch die drey Puncte L', P', N' gebildete Dreyeck wird in keiner seiner Dimensionen Aenderungen leiden; es wird mithin genau durch $L'P'N'$ dargestellt seyn, und der Winkel in P' wird der der beyden gegebenen Ebnen seyn.

§. 40. Aufgabe.

Eine Ebne nebst einer in dieser Ebne liegenden geraden Linie ist gegeben; man soll durch diese Gerade eine Ebne legen, welche mit der ersten einen gegebenen Wiukel einschließt.

Man construire durch einen auf der gegebenen Linie nach Belieben genommenen Punct eine auf

dieser Linie senkrechte Ebne; man suche den Durchschnitt derselben mit der gegebenen Ebne, und führe in der senkrechten Ebne eine Gerade, welche mit dieser den gegebenen Winkel bildet.

Es ist leicht die Auflösung der vorhergehenden Aufgabe dergestalt zu wählen, daß sie auf die, welche uns jetzt beschäftigt, angewendet werden kann.

In der That sind alsdann die gegebenen, 1) die Ebne H' E F''; 2) die verticale Ebne FH'*F*, welche sich auf die der horizontalen Ebne befindet. Man construire L' *N'* und P' wie in der vorhergehenden Aufgabe, und man lege an L'P' den Winkel L'P'*N'* dem gegebenen Winkel gleich; durch den solchergestallt bestimmten Punct *N'* führe man H'G, hierauf ziehe man *G*F'', so wird man die gesuchte Ebne H'*G*F'' haben.

§. 41. Aufgabe.

Wenn man den von zweyen Linien eingeschlossenen Winkel kennt, und den, welchen jede derselben mit der durch ihren gemeinschaftlichen Durchschnittspunct geführten verticalen Linie bildet, die Projection des ersten Winkels auf der horizontalen Ebne zu finden.

Man kann den Durchschnittspunct der vorgelegten Geraden mit der verticalen, als den Scheitel einer dreyeckigten Pyramide betrachten, in welcher man die drey Winkel kennt, welche von je zweyen und zweyen ihren Gränzen eingeschlossen werden; diese Pyramide hat überdies zur Basis eine auf einer

dieser Gränzen senkrechte Ebne, weil sie auf der horizontalen Ebne ruht. Vermittelst dieser gegebenen Theile kann man sie entwickeln.

Denn denkt man sich, daß sich die Fläche DAG' Fig. 28 um AD dreht, bis sie sich an die Verlängerung der Fläche DAÆ anschließt, so ist leicht einzusehen, daß in dieser Bewegung der Punct G' nicht aus der horizontalen Ebne kommen wird, weil AD eine verticale und folglich AD' auf ihr senkrecht ist; DG wird also mit DG' von einerley Größe seyn, und in dem rechtwinklichten Dreyecke DAG kennt man alsdann den Winkel ADG, welches derjenige ist, den eine der vorgelegten Linien mit der verticalen AD einschließt, und dessen Werth a priori gegeben oder nach Belieben genommen ist.

Man wird folglich die beyden Seiten AG und DG bestimmen können, und auf eben die Art mit dem Dreyeck DAÆ, zu verfahren haben. Wenn endlich AG und DG' AÆ und DÆ bekannt sind, so kann man das Dreyeck DÆF' construiren, in welchem der Winkel ÆDF'' demjenigen gleich ist, welchen die vorgelegten Geraden mit einander einschließen, und die Seite DF'' mit DG einerley ist. Nachdem die Größe von ÆF'' erhalten ist, sieht man, daß, wenn sich das Dreyeck ÆDF'' um DÆ, und das Dreyeck ADG um AD dreht, die Puncte G und F'' sich im Winkel G' der Pyramide vereinigen müssen; man wird also die Basis dieser Pyramide haben, wenn man auf den drey Sei-

ten AE, AG und EF'' das Dreyeck $AG'E$ beschreibt.

Der Winkel EAG' wird die verlangte Projection des Winkels EDG' seyn *).

§. 42. Aufgabe.

Wenn zwey Linien auf einer Ebne gegeben sind, durch ihren Durchschnittspunct eine dritte zu führen, welche mit jeder derselben einen gegebenen Winkel macht.

Die drey Linien welche wir betrachten bilden ein körperliches Dreyeck, wenn man durch je zwey und zwey derselben eine Ebne legt; und man kann diese entwickeln, wenn man zwey dieser Flächen herumbewegen läßt, bis sie in die Verlängerung der dritten fallen.

Es seyen $G'AE'$, EAH', $H'Ag$ Fig. 29 die drey gegebenen Winkel; nimmt man nun auf den Linien AG und Ag die Puncte G und g vom Scheitel A gleich weit entfernt, so ist leicht einzusehen, daß diese Puncte auf einander fallen müssen, wenn die Ebnen in ihrer natürlichen Lage vereinigt sind, allein es ist nicht weniger evident (§ 8), daß die auf die Geraden AE' und AH' um welche die Zer-

*) Diese Aufgabe findet in der Trigonometrie ihre Anwendung, um die auf geneigten Ebnen beobachteten Winkel auf den Horizont zu reduciren; sie kann auch vemittelst der sphärischen Trigonometrie aufgelöst werden. (Trig. §. 58).

fällung geschieht, herabgelassenen senkrechten G G und g g, Ebnen beschreiben werden, welche auf diesen Linien senkrecht sind, und diese letztern werden die horizontale Ebne nach G G′ und gG schneiden; der Punct G wird folglich zum gemeinschaftlichen Durchschnitt der beyden Ebnen gehören, welche wir betrachten, und welcher in diesen Puncte vertical seyn wird. Auf dieser Linie müssen sich die Puncte G und g vereinigt finden; die Gerade A G′ ist also die horizontale Projection der obern Gränze der körperlichen Ecke, wenn diese Gränze in ihrer natürlichen Lage ist. Da der Punct A derjenige ist, in welchem sie die horizontale Ebne schneidet, so braucht man blos um ihn völlig zu bestimmen, dahin zu gelangen, die Höhe eines andern dieser Puncte zu kennen; wir bemerken aber, daß die dazu gehörigen Puncte G und g jede für sich in der Zerfällung einen Kreis beschreiben, und diese Kreise werden in der durch G G und g g begränzten Ebne liegen. Wenn man also einen dieser Kreise beschreibt, indem man seine Ebne an der horizontalen Ebne angeschlossen denkt, so wird er die Höhe des Punctes im Raume bestimmen, worin die Vereinigung der Puncte G und g geschieht.

Auf G G, als Halbmesser hat man den Halbkreis G G″ beschrieben, und die senkrechte G′ G″, welche nichts anders als der gemeinschaftliche Durchschnitt der auf G G′ und g G′ errichteten verticalen Ebnen ist, giebt die Höhe des gesuchten Punctes über der horizontalen Ebne.

Wenn man GG'' zieht, so wird diese Linie die Projection der obern Gränze des körperlichen Dreyecks auf der durch die Linie GG' gelegten verticalen Ebne seyn, man wird also die beyden Projectionen dieser Gränze haben, und sie wird mithin bestimmt seyn.

§. 43. Zusatz.

Der Winkel $G''GG'$ ist demjenigen gleich, welchen die beyden Ebnen GAE' und $E'AH'$ einschließen, wenn sie sich in ihrer natürlichen Lage befinden, denn es ist offenbar, daß die Ebne $G''GG''$ auf ihrem gemeinschaftlichen Durchschnitt AE' senkrecht, und daß GG'' nichts anders als die auf diese Ebne zurückgeführte GG ist.

§. 44. Anmerkung.

Die vorhergehende Aufgabe wird unmöglich, wenn einer der drey gegebenen Winkel größer als die Summe der beyden übrig ist; die Auflösung, welche wir davon gegeben haben, zeigt die Unmöglichkeit, weil alsdann der Punct G' außerhalb des auf CG beschriebenen Kreises fällt.

Man kann sich diese Ausnahmen leicht denken, wenn man sich die beyden rechtwinklichten Kegel denkt, welche die Winkel $E'AG$ und $H'Ag$ beschreiben, wenn sich diese Winkel respectiv um ihre Seiten AE' und AH' drehen. Die Aufgabe ist nur dann möglich, wenn diese beyden Kegel einander schneiden oder berühren, allein dieser Fall wird nicht

eintreten, wenn aber eine den andern gänzlich umschließt, oder wenn ihre Grundflächen einander nicht schneiden.

§. 45.

Man kann die Aufgabe umkehren und sich vorlegen, die Entwickelung eines körperlichen Dreyecks zu finden, welches vonden bey den Geraden AE'' AH' und einer dritten gebildet wird, deren horizontale Projection AG', und deren verticale Projection *GG''* wäre; man müßte alsdann die Winkel GAE, und gAH' bestimmen, und hierzu gelangt man folgendermaaßen. Man verlängere *GG'* unbestimmt, und beschreibe auf *GG''* einen halben Kreis, welcher den Punct G geben wird, und AG wird die gesuchte Gerade seyn. Auf eben die Art muß man beym Aufsuchen der Ag verfahren.

Man sieht also, daß alles was zur Construction einer körperlichen Ecke erfordert wird, gegeben ist, sobald man eine seiner Flächen, die Projection der ihr gegenüber stehenden Gränze auf diese Fläche, und die Höhe eines Punctes dieser Gränze über seine Projection hat.

§. 46. Lehnsatz.

Wenn man von irgend einem Puncte des gemeinschaftlichen Durschnitts zweyer Ebnen, auf jeder dieser Ebnen eine senkrechte Linie errichtet, so werden diese Linien einen Winkel einschließen, wel-

cher mit dem von beyden vorgelegten Ebnen eingeschlossenen einerley Maaß haben wird.

Denn die dergestalt errichteten Linien werden sich in einer auf dem gemeinschaftlichen Durchschnitt der vorgelegten Ebnen senkrechten Ebne befinden, und nimmt man an, daß AE Fig. 30 und AF die Durchschnitte dieser mit der ersten seyen, so ist leicht einzusehen, daß die Winkel EAF und eAf gleich sind; denn sie sind beyde der Unterschied des Winkels EAe mit den rechten Winkeln EAf und eAF.

§. 47. Lehrsatz

Wenn man aus dem Scheitel eines körperlichen Dreyecks auf jede seiner Flächen eine senkrechte Linie errichtet, so werden die Ebnen, welche je zwey und zwey dieser Linien enthalten, ein neues körperliches Dreyeck bilden, in welchen die Winkel der Gränzen den Winkeln der Flächen im ersten, und die Winkel der Flächen den Winkeln der Gränzen des erstern gleich sind.

Es sey Ae Fig. 31. die auf der Fläche AFG senkrechte; so wird sie auf den durch den Endpunct derselben in dieser Ebne geführten Linien CA und AF senkrecht seyn; schließt man auf eben die Art bey den auf den Flächen AEG und AEF respectiv senkrechten Af und Ag so kann man folgende Tafel bilden:

Die auf AFG senkrechte Ae, ist es auch auf $\begin{cases} \text{AF} \\ \text{FG;} \end{cases}$

Die auf AEG senkrechte Af, ist es auch auf $\begin{cases} \text{AE;} \\ \text{AG} \end{cases}$

Die auf A E F senkrechte A e, ist es auch auf $\left\{\begin{matrix}AE\\AF\end{matrix}\right.$;

Man sieht aber, daß jede der Gränzen des ersten körperlichen Dreyecks zwey Mahl wiederholt vorkommt; man kann also folgendermaaßen schließen:

Die auf $\left\{\begin{matrix}Af\\ \text{und}\\ Ag\end{matrix}\right\}$ senkrechte AE, ist es auch auf der Ebne Afg;

Die auf $\left\{\begin{matrix}Ae\\ \text{und}\\ Ag\end{matrix}\right\}$ senkrechte AF, ist es auch auf der Ebne eAg;

Die auf $\left\{\begin{matrix}Ae\\ \text{und}\\ Af\end{matrix}\right\}$ senkrechte AG, ist es auch auf der Ebne eAf.

Nun bilden vermöge des vorhergehenden Lehnsatzes die Linien A e und A g denselben Winkel mit einander, welchen die Ebnen A F G und AEF bilden, auf denen sie respectiv senkrecht sind; dasselbe wird auch bey den Linien AE, AG und den Ebnen Afg, Aef der Fall seyn; es werden also die Winkel der Gränzen des einen körperlichen Dreyecks denen der Flächen des andern gleich seyn und umgekehrt.

§. 48. Zusatz.

Hieraus folgt, daß man die Entwickelung eines körperlichen Dreyecks construiren kann, in welchem

man die Winkel kennt, welche seine Flächen einschließen.

Denn wenn man ein körperliches Dreyeck bildet, dessen Gränzen je zwey und zwey den gegebenen Winkeln gleiche Winkel einschließen, so kann man vermittelst der im § 42 und 43 gezeigten Mittel, die Winkel der Flächen dieses finden, welche nach dem vorhergehenden Lehrsatze denen der Gränzen des vorgelegten körperlichen Dreyecks gleich seyn werden. Sobald man aber diese letztern kennt, so kann man das körperliche Dreyeck, zu welchem sie gehören entwikkeln, und die Projection irgend einer seiner Gränzen auf der Ebne der beyden andern finden.

§. 49. Aufgabe.

Wenn man in einer körperlichen Ecke den Winkel kennt, welche zwey Gränzen bilden, und ferner diejenigen, welche die Flächen in der sie liegen, mit jeder der übrigen bildet, auf ihrer Ebne die Projection der dritten Gränze zu finden.

Die vorgelegte Aufgabe kommt auf folgende zurück: wenn man die Winkel kennt, welche zwey Ebnen mit der horizontalen Ebne einschließen, und die Linien nach welchen sie diese schneiden, die Projection ihres gemeinschaftlichen Durchschnitts zu finden.

Es seyen AE′ und Ae′ Fig. 32 die gemeinschaftlichen Durchschnitte der vorgelegten Ebnen mit der horizontalen; G′E′F, g′e′f die Winkel, welche jede der ersten mit der dritten bildet. Führt man

von einem auf e′g′ nach Belieben genommenen Puncte g′ eine parallele zu Ae′, so wird diese Gerade (§ 28) die Projection einer in der Ebne Ae′f in der Höhe g′f horizontal geführten Linie seyn.

Denkt man sich auf eben die Art eine in der Ebne AE′F in derselben Höhe geführte horizontale Linie, so wird sie nothwendigerweise die, von welcher wir reden, in einem Puncte des gemeinschaftlichen Durchschnitts der beyden vorgelegten Ebnen schneiden; denn sie bestimmen zusammen eine zur horizontalen Ebne parallele Ebne; die Projectionen dieser Linien werden sich folglich in einem Puncte schneiden, die Projection eines von denen der dritten Gränze seyn wird.

Nimmt man E′K′ der g′f gleich, und führt K′F zu E′G′ parallel, so wird man einen Punct F von der Lage finden, daß seine Höhe G′F über seiner Projection der g′f gleich seyn wird, und folglich wird die zu AE parallele G′O′, die Projection der in der Ebne zu AE′F in derselben Höhe als die erste, welche wir construirt haben, horizontal geführten Geraden seyn; O′ wird also ein auf dem gemeinschaftlichen Durchschnitt der Ebnen Ae′f und AF′F oder auf der dritten Gränze genommener Punct seyn. Die Höhe des Punctes dessen Projection O′ ist, ergiebt sich aus der Construction selbst, weil sie der G′F gleich ist, so wie die aller Puncte, welche oberhalb der Geraden g′f und G′F correspondiren.

§. 50. Aufgabe.

Wenn man in einer körperlichen Ecke zwey Flächen und den von ihnen eingeschlossenen Winkel kennt, die Entwickelung dieses körperlichen Dreyecks zu construiren.

Wir wollen zuvörderst annehmen, man habe die eine der gegebenen Seiten Agg auf die andre AgG herabgelassen; wenn man nun aus einem auf der gemeinschaftlichen Gränze Ag beliebig genommenen Puncte g eine senkrechte gg errichtet, so wird sie in der Entwickelung eine auf dieser Gränze senkrechte Ebne beschreiben. In dieser Ebne muß sich der Winkel befinden, welcher das Maaß des Winkels ist, den beyde gegebene Flächen einschließen; legt man also an gG den Winkel G″gG dem bekannten Winkel gleich, und nimmt man gG″ der gg gleich, so wird man die Lage des Punctes g in Rücksicht der Geraden gG haben, wenn er in seiner natürlichen Lage ist; es ist aber leicht einzusehen, daß die drey Puncte g′, G″ und G die Grundfläche der Pyramide begränzen, welche von dem vorgelegten körperlichen Dreyeck, und der auf dessen Gränze Ag senkrecht geführten Ebne begränzt wird; da ferner die gesuchte Fläche an AG liegen, und sich mit den Dreyecken Agg und GgG″ nach den Linien Ag und GG″ vereinigen muß, so kann sie nur das aus den drey Seiten AG, Ag und GG″ beschriebene Dreyeck seyn. *)

*) Diejenigen meiner Leser, welche mit der sphärischen Trigonometrie vertraut sind, werden in den vorhergehen-

§. 51. Aufgabe.

Wenn die Projectionen eines Punctes auf den coordinirten Ebnen gegeben sind, diesen Punct auf andre gegebene Ebnen zu projiciren.

Die Erklärung, welche wir von den Projectionen gegeben haben, reducirt die vorgelegte Aufgabe, auf die Untersuchung des Durchschnitts der gegebenen Ebne, der durch den Punct, welchen man von neuem projiciren will, darauf senkrecht geführten Ebne; und dies läßt sich nach dem Vorhergehenden leicht bewerkstelligen.

Was aber die Aufgabe, welche wir vor Augen haben, besonders characterisirt, ist auf der gegebenen Ebne den Durchschnittspunct anzumerken, von dem eben gesprochen wird, damit man, wenn mit mehreren Puncten des Raums auf eine ähnliche Art verfahren wird, ihre respectiven Projectionen auf dieser Ebne bestimmen kann.

In dieser Hinsicht muß man die Lage einer jeden der gesuchten Projectionen gegen zwey in der gegebenen Ebne genommene Gerade bestimmen, deren Lage gegen die coordinirten Ebnen bekannt ist. Der gemeinschaftliche Durchschnitt der gegebenen Ebne mit der horizontalen, und der, welchen sie mit einer

---

den Aufgaben, die vorzüglichsten dieser Trigonometrie finden; und dieses wird ihnen hoffentlich hinreichend seyn, um alle die aufzlösen, welche sich nur darbieten können.

auf dieser Linie senkrechten Ebne haben würde, sind zu diesem Gebrauch sehr geschickt; es kommt dann nur noch darauf an, die Entfernung der gesuchten Projectionen von jeder dieser Geraden zu finden. Es sey N′MN″ Fig. 34. die vorgelegte Ebne, P′ und P″ die Projectionen des gegebenen Punctes; die Projectionen der von diesem Puncte auf die vorgelegte Ebne geführten senkrechten, sind P′p′ auf der horizontalen Ebne, und e″q″ auf der auf MN′ senkrechten verticalen Ebne, welche man hier an der horizontalen Ebne angeschlossen annimmt, nachdem sie sich um N′E′ gedreht hat; man wird also N′q″ (§ 35) für die Entfernung des Durchschnittspunctes der senkrechten und der vorgelegten Ebne von der Geraden MN′ erhalten.

Wenn man nun annimmt, die Ebne N′MN″ drehe sich um den gemeinschaftlichen Durchschnitt MN′ bis sie an der horizontalen Ebne anschließt, so wird die Linie N′q″, die in ihrer natürlichen Lage auf MN′ senkrecht ist′ auf N′E′ fallen; woraus folgt, daß die gesuchte Projection in einer der N′p gleichen Entfernung MN′ liegen wird; da aber diese Projection in der auf P′p′ errichteten verticalen Ebne liegt, so wird sie bey der angenommenen Bewegung auf diese Gerade getragen seyn, und folglich in p′ fallen.

Man kann zur eben gefundenen Projection eine andere auf der verticalen Ebne durch N′p gehende Projection hinzufügen, wenn man der Ebne N′MN″ den senkrechten von den auf die verticale Ebne, von der die Rede

ist, zurückgeführten vorgelegten Puncten, auf N'q'' gefällt sind. Nun befindet sich diese Gerade auf N'p, wenn man die neue coordinirte Ebne an der horizontalen Ebne anschließen läßt: man muß also aus dem Puncte p die der e''q'' gleiche senkrechte pp'' auf N'q errichten.

Die neuen coordinirten Ebnen sind die Ebne N'*MN''* und eine auf dieser durch N'p gehende senkrechte Ebne.

Ich habe mich bey dieser Aufgabe etwas aufgehalten, weil sie bey der Auflösung vieler andern von großem Nutzen ist.

§ 52. Erster Zusatz.

Wenn man auf diese Art zwey Puncte auf die vorgelegte Ebne N'*M*N'' zurückführt, so wird man auf dieser Ebne die Projection der Geraden finden, welche sie begränzen.

§. 53. Zweyter Zusatz.

Umgekehrt kann man, wenn die Lage eines Punctes gegen die neuen coordinirten Ebnen, welche wir betrachten, bekannt ist, seine Projectionen auf den ersten coordinirten Ebnen finden.

Man nehme N'q'' der N'p gleich, und nachdem man q''e'' der pq'' gleich auf N'q'' senkrecht errichtet hat, führe man e''P' zu *M*N' parallel, welche durch ihren Durchschnitt mit P'p' die gesuchte Projection auf der horizontalen Ebne geben wird; wird diese in einer der E'e'' gleichen Höhe

PP'' auf die verticale Ebne DAB zurückgebracht, so wird sie die Projection P'' auf dieser letztern angeben.

§. 54. Aufgabe.

Zwey Ebnen, so wie eine in einer derselben liegende gerade Linie sind gegeben; man soll in der andern eine Linie ziehen, welche mit der ersten einen gegebenen Winkel macht.

Es ist klar, daß diese Linien, um einen Winkel einzuschließen, einander schneiden müssen; und da sie in zwey verschiedenen Ebnen liegen, so kann dies nur im gemeinschaftlichen Durchschnitte dieser Ebnen geschehen.

Dieses vorausgesetzt, lege man in der ersten ABC Fig. 35, welche die gegebene Linie $G'E$ enthält, einen Winkel $F'G'E$ dem bekannten Winkel gleich an; man denke sich dann, daß sich dieser Winkel um $G'E$ drehe, bis seine andre Seite $G'F'$ auf die zweyte Ebne CAD zu liegen kommt: und da der Scheitel G' schon in dieser Ebne liegt, so kommt es nur darauf an, noch einen Punct zu finden, welcher auf der in dieser Lage genommenen Geraden $G'F'$ liege.

Wenn man auf $G'E$ durch den Punct E die senkrechte EF' errichtet, so wird der Punct F' bey der angezeigten Bewegung einen Kreis beschreiben, welcher die Ebne CAD im gesuchten Puncte schneiden wird. Es ist leicht einzusehen, daß die Ebne dieses Kreises auf der Ebne ABC senkrecht seyn wird; denn da sie durch die Linie EF' erzeugt wor-

den, so muß sie auf der Linie G′*E* senkrecht seyn, welche sich in dieser befindet; allein die Durchschnittspuncte des Kreises mit der Ebne CAD müssen auf der Geraden liegen, welche der Durchschnitt dieser Ebne mit der durch *E*F erzeugten seyn, und welche letztere den Kreis enthält, worauf es hier ankommt. Man hat also alles was zur Auflösung der vorgelegten Aufgabe erfordert wird, in einer einzigen Ebne; denn man kann vermittelst der vorhergehenden Aufgabe, in dieser Ebne ihren gemeinschaftlichen Durchschnitt mit CAD finden, und den durch den Punct F′ erzeugten Kreis finden.

Wir wollen nun annehmen, daß die durch *E*F′ beschriebene Ebne auf ABC anschließe; ihr gemeinschaftlicher Durchschnitt *E*E″ mit der verticalen Ebne wird, da er auf *E*F′ senkrecht ist, auf G′*E* fallen, und der Punct E″ wird in E übertragen seyn; dieß wäre schon einer der Puncte des gemeinschaftlichen Durchschnitts der Ebne E″*E*F′ mit der Ebne CAD. Um noch einen andern zu finden, suche ich die Höhe *F*F″ des in der Ebne CAD mit F′ correspondirenden Punctes; denn da dieser Punct in der in F′ errichteten verticalen liegt, so wird er auch in der Ebne E″*E*F′ liegen. Nimmt man FF″ der *F*F″ gleich, so wird die Gerade *F*E der gesuchte gemeinschaftliche Durchschnitt der Ebne CAD mit der auf *E*F errichteten verticalen Ebne seyn; der aus dem Puncte *E* als aus einem Mittelpuncte mit dem Halbmesser *E*F′ beschriebene Kreis F′Kk, wird sie in K und k schneiden; man braucht also nur diese

Puncte auf die Ebne ABC zurück zu führen, wovon die Operation in der Figur hinlänglich angezeigt ist.

Die Aufgabe hat zwey Auflösungen; denn G′F′ beschreibt in der ihm beygelegten Bewegung einen Kegel, welcher im Allgemeinen die Ebne CAD zwey Mahl treffen muß. Es könnte sich auch zutragen, daß diese Ebne den Kegel nur berührte, und endlich, daß sie ihn gar nicht erreicht.

Beyläufig ist noch zu merken, daß der Winkel DAB die Projection auf der verticalen Ebne des Winkels F′G′E ist, wenn er in der Lage ist, welche er haben muß, und daß man folglich die vorgelegte Aufgabe folgendermaaßen vortragen könnte:

Wenn man die Projection eines Winkels, und die Lage einer seiner Schenkel kennt, die des andern zu finden.

§. 55. Aufgabe.

Wenn die Projectionen P′G′ und P″G einer geraden Linie im Raume gegeben sind, durch diese Gerade eine Ebne zu legen, welche mit der horizontalen Ebne einen gegebenen Winkel macht.

Gesetzt die gesuchte Ebne sey N″MN′, und man wisse ihren gemeinschaftlichen Durchschnitt mit der horizontalen Ebne; so ist klar, daß sie durch den Punct G′ gehen muß, in welchem die gegebene Linie diese letztere trifft.

Wir wollen annehmen, man habe durch einen Punct P der gegebenen Linie eine auf diesem gemein-

schaftlichen Durchschnitt senkrechte Ebne errichtet. Die Linien P'E', PE', P'P, in welchen diese neue Ebne, die horizontale, die gegebene, und die projicirende Ebne der gegebenen Geraden schneidet, bilden ein in P' rechtwinklichtes Dreyeck, in welchem man die Seite P'P und den Winkel PEP' kennt; es ist also leicht dasselbe zu construiren, wodurch man P'E' erhält. Da aber die Ebne PE'P' auf der Linie G'N' senkrecht ist, so wird das Dreyeck G'E'P in E' rechtwinklicht seyn; man kennt überdies darin die Seiten G'P' und P'E'; es wird sich also construiren, und der Punct E' finden lassen, wodurch man den gemeinschaftlichen Durchschnitt N'G' der horizontalen mit der gesuchten Ebne erhält; man braucht alsdann nur noch diese durch den Punct P der gegebenen Linie gehen zu lassen, welches nach §. 31 leicht geschehen kann.

Die zweyte zu diesem §. gehörige Figur hat mit der ersten einerley Buchstaben; sie enthält ferner die Construction der rechtwinklichten Dreyecke e'P'P und G'P'E'; das erste hat zur Seite P'P, welche der *PP''* gleich ist, und der Winkel ePP' ist das Complement des gegebenen Winkels. Man beschreibt dann auf G'P' als einen Durchmesser, einen Kreis, in welchem man die Sehne P'E' der P'e' gleich nimmt, und das auf diese Art construirte Dreyeck P'E'G' ist mit dem Dreyeck P'E'G der ersten Figur einerley.

§. 56. Zusatz.

Wenn die gesuchte Ebne nicht mit der horizon-

talen, sondern mit irgend einer Ebne den gegebenen Winkel machen sollte; so müßte man die gegebene Linie auf diese Ebne nach §. 52 projiciren, und die Aufgabe würde dann auf die vorhergehende zurück kommen. Nachdem man den gemeinschaftlichen Durchschnitt der gegebenen Ebne mit der gesuchten gefunden haben wird, würde man zwey Gerade haben, welche diesen letztern bestimmen würden.

§. 57. Aufgabe.

Zwey sich nicht schneidende gerade Linien sind im Raume gegeben; man soll ihre kleinste Entfernung von einander finden.

Wir wollen zuvörderst annehmen, daß eine der gegebenen Geraden auf der horizontalen Ebne senkrecht sey, so wird sie darin durch den einzigen Punct M′ dargestellt seyn; und in der verticalen Ebne wird ihre Projection *MM″* Fig. 37 auf AB senkrecht seyn.

Man errichte M′P′ auf die horizontale Projection P′H′ der zweyten gegebenen Geraden senkrecht, und diese wird die verlangte kürzeste Entfernung seyn.

Denn wir haben im §. 16 gesehen, daß der Abstand zweyer im Raume gegebenen Puncte und seine Projectionen auf der horizontalen Ebne, Theile eines rechtwinklichten Dreyecks ausmachen, in welchem die erste die Hypothenuse, und die andre eine Cathete ist: hieraus folgt, daß diese letztere kleiner als die erstere ist. Nun ist die auf P′H′, senkrechte P′M′, die kürzeste aller horizontalen Projectionen von allen Entfernun-

gen der auf den beyden gegebenen Linien genommenen Puncten; und diese Projection ist nichts anders als die Entfernung zweyer in jeder Linie gleich hoch über der horizontalen Ebne liegenden Puncte; es ist also nach dem vorhergehenden klar, daß dieser Abstand der kürzeste ist, welcher zwischen den beyden Linien existiren kann.

Man findet die Puncte, durch welche sie gehen muß, wenn man auf der Linie P''H'' den mit P' correspondirenden Punct sucht, und indem man auf der verticalen Projection der andern gegebenen Geraden, einen in derselben Höhe über der horizontalen Ebne liegenden Punct M'' sucht.

Wenn die gegebenen Geraden gegen die coordinirten Ebnen irgend eine andre Lage hätten, so würde man sie nach § 82 auf einer derselben senkrechten Ebne projiciren, und die eben gegebene Auflösung würde dann auf diesen allgemeinen Fall anwendbar seyn.

§. 58.

Man kann ferner die kürzeste Entfernung der beyden Geraden M'N' und EF Fig. 38 finden, wenn man durch die erste eine zur zweyten parallelen Ebne H'G' legt (Geom. §. 216), und dann aus irgend einem Puncte der zweyten eine senkrechte EE' auf diese Ebne fällt; diese senkrechte ist die gesuchte kürzeste Entfernung, und bestimmt die Ebne FEE', welche die Gerade M'N' im Puncte P' schneidet, worin sich diese Gerade der EF am meisten nähert.

Diese Operationen werden folgendermaßen verrichtet. Fig. 39.

EP″ und E′P′ } sind die Projectionen der ersten gegebenen Geraden.

OM″ und O′M′ } die der zweyten.

E′ ist der Punct, in welchem die erste gegebene Linie die horizontale Ebne trifft, und E′L′ EL″ sind die Projectionen einer durch diesen Punct zur zweyten gegebenen Geraden parallel geführten Linie, um eine Ebne zu bestimmen, welche dieser Linie parallel sey.

Nach dem Verfahren des § 46 hat man die Ebne construirt, welche durch die oben geführte Linie, und durch die erste der gegebenen Linien geht; diese Ebne ist G′GG″, und da sie zur zweyten gegebenen Geraden parallel ist, so kommt es nur noch darauf an, von irgend einem Puncte dieser letztern eine auf dieser Ebne senkrechte Linie zu fällen, dieses geschieht durch den Punct, dessen Projection O′ und O sind.

Man hat ferner, wie im § 25 gezeigt, worden, den Durchschnitt dieser senkrechten mit der Ebne G′GG″ gesucht, und für ihre Projectionen N′ und M″ gefunden.

Um

Um endlich den Punct zu finden, durch welchen die kürzeste Entfernung geht, hat man durch den Punct N', eine Linie N'P' zur horizontalen Projection *MO'* der zweyten Geraden parallel geführt, welche offenbar die Projection auf der horizontalen Ebne des gemeinschaftlichen Durchschnitts der Ebne G'CG'' mit einer auf ihr senkrechten Ebne, und welche man durch die zweyte gegebene Gerade geführt haben würde, weil sie zu einer Geraden geführt, welche jener parallel ist, und durch den Punct geht, worin die von dieser Geraden auf die Ebne, worauf es hier ankommt, herabgelassene senkrechte, diese Ebne trifft, oder anders, weil sie die Projection von E'F' ist (Fig. 38).

Der Punct P', in welchem die Linie N'P' die horizontale Projection E'P' der ersten gegebenen Linie schneidet, ist die Projection des Punctes P der Fig. 38, und mithin die des Punctes, in welchem sich die erste Gerade der zweyten möglichst nähert. Man erhält dann die verlangte kürzeste Entfernung, wenn man die der Puncte sucht, deren Projectionen P' und P'' K' und K'' sind (§. 16), oder die der in O und O', N' und N'' projicirten Puncte.

§. 59. Lehrsatz

Die Summe der Quadrate der Cosinus der Winkel, welche irgend eine Ebne mit dreyen andern auf einander senkrechten bildet, ist dem Quadrate des Halbmessers gleich.

Wenn man sich durch den Punkt M eine auf

der Geraden AM Fig. 40 senkrechte Ebne denkt, so werden die Durchschnitte BN′ BN″ und CN‴ dieser Ebne mit jeder der coordinirten Ebnen respectiv auf den Projectionen M′A, M″A und M‴A der Linie AM senkrecht seyn; und die dieser Geraden zugehörigen projicirenden Ebnen AN′M, AN″M, AN‴M werden durch ihre Durchschnitte mit der Ebne N″N′N‴ und den coordinirten Ebnen die Winkel bestimmen, welche diese mit jeder der letztern bildet.

In den Dreyecken AM′M, AM″M, AM‴M, werden, wenn AM für den Halbmesser genommen wird, die Linien MM′, MM″, MM‴ die Sinus der Winkel MAM′, MAM″, MAM‴, oder die Cosinus der Winkel AN′M, AN″M, AN‴M in den Dreyecken AN′M, AN″M, AN‴M, vorstellen, welche alle in M rechtwinklicht sind; hieraus folgt (§. 24), daß die Summe der Quadrate der Cosinus der Winkel, welche irgend eine Ebne mit dreyen andern auf einander senkrechten Ebnen einschließt, dem Quadrate des Halbmessers gleich ist.

§. 60. Lehnsatz.

Wenn man auf einer geneigten Ebne irgend eine gezeichnete Figur hat, und man projicirt sie auf die horizontale Ebne, indem man von allen Puncten ihres Umfanges auf diese horizontale Ebne senkrechte Linien herab, fällt, so wird sich die Fläche der Projection zu der vorgelegten Figur verhalten, wie der Cosinus des Winkels beyder Ebnen sich zum Halbmesser verhält.

Es sey MNPQ Fig. 41. ein Trapezium, dessen Seiten MN und PQ auf dem gemeinschaftlichen Durchschnitt AC der Ebnen BAC und DAC senkrecht seyen: so ist klar, daß sich die Längen der Projectionen M′N′ und P′Q′ zu den correspondirenden Seiten MN und PQ verhalten, wie der Cosinus des Winkels M′G′M zum Halbmesser; denn wegen der Parallelen MM′ und NN′ hat man N′M′ : NM = G′M′ : G′M oder = cos M′GM : Halbmesser.

Die Dreyecke P′H′P, Q′H′Q sind den Dreyecken N′G′N und M′G′M ähnlich; die Theile der erstern haben also dieselben Verhältnisse zu einander, wie die Theile der letztern.

Es ist ferner klar, daß das Trapezium MNPQ mit seiner Projection M′N′P′Q′ einerley Breite hat; sie müssen sich also wie die Summe ihrer parallelen Seiten, oder, welches auf eins hinauskommt, wie ihre Längen verhalten; man hat also
M′N′P′Q′ : MNPQ = cos M′G′M : Halbmesser.

Was wir so eben vom Trapezium gesagt haben, gilt von einem jeden Dreyecke; denn es liege das Dreyeck ABC Fig. 42. in einer geneigten Ebne, deren Durchschnitt mit der horizontalen Ebne G′H′ sey; wenn man AD und CE auf diese Linie senkrecht führt, und durch den Punct B zur Seite AC die Gerade DE parallel führt, so ist klar, daß das Dreyeck ABC die Hälfte des ganzen Parallelogramms DACE ist; denn sie haben beyde einerley Grundlinie und Höhe; und da diese letztere Figur ihre Seiten auf dem gemeinschaftlichen Durchschnitt

$G'H'$ senkrecht hat, so lassen sich alle beym Trapez MNOP der Fig. 41 angestellten Betrachtungen dabey anwenden.

Da jede Figur in Trapezia und in Dreyecke zerlegt werden kann, so folgt, daß die Wahrheit des obigen Lehnsatzes allgemein richtig ist.

§. 61. Zusatz.

Aus dem vorhergehenden Lehrsatze und Lehnsatz folgt, daß wenn man irgend eine ebne Figur auf drey auf einander senkrechte Ebnen projicirt, die Summe der Quadrate der Flächen dieser Projectionen dem Quadrate der Fläche der vorgelegten Figur gleich ist.

Um diese Wahrheit darzuthun, seyen S die Fläche der vorgelegten Figur, S', S'', S''' die ihrer Projectionen. Bezeichnet nun A' den Winkel, welchen die diese Figur enthaltende Ebne mit der ersten der coordinirten Ebnen macht, A'' den welchen sie mit der zweyten, und A''' den welchen sie mit der dritten bildet, so wird man haben:

$S : S' : S'' : S''' =$ Halbmesser : $\cos A' : \cos A'' : \cos A'''$, und nimmt man die Quadrate

$S^2 : S'^2 : S''^2 : S'''^2 = R^2 : \cos A'^2 : \cos A''^2 : \cos A'''^2$; woraus man zieht

$S^2 : S'^2 + S''^2 + S'''^2 = R^2 : \cos A'^2 + \cos A''^2 + \cos A'''^2$; nun sind nach dem citirten Lehrsatze die beyden letzten Glieder dieser Proportion einander gleich; es werden es daher auch die beyden ersten seyn.

In der Geometrie kann man sich nicht das Quadrat einer Fläche vorstellen, weil dieses vier Dimensionen voraussetzen würde; allein man muß sich hier vorstellen, daß diese Fläche und ihre Projectionen zu einander Verhältnisse haben, welche mit den Verhältnissen der Linien einerley sind, von denen das Quadrat der ersten der Summe der Quadrate der drey andern gleich ist. Hieraus folgt, daß das Quadrat der Einheiten der Fläche der vorgelegten Figur der Summe der Quadrate einer jeden Anzahl der in ihren Projectionen enthaltenen ähnlichen Einheiten gleich ist.

§. 62. Anmerkung.

Man kann zu einem Lehrsatz über die rechtwinklichten Teträdra gelangen, welcher nur ein besondrer Fall vom vorhergehenden Satze ist.

Es sey ABCD Fig. 43. eine dreyeckigte Pyramide, deren drey Flächen auf einander senkrecht sind; aus dieser Annahme folgt, daß die Dreyecke DAC, DAB und BAC welche diese Flächen bilden, die Projectionen des Hypothenusal-Dreyecks BDC sind; da nun AD auf der Ebne BAC senkrecht ist, so hat man

$$DAC = \frac{AC \times AD}{2}$$

$$DAB = \frac{AB \times AD}{2}$$

woraus man zieht, wenn quadrirt wird

$$\overline{DAC}^2 + \overline{DAB}^2 = \frac{\overline{AC}^2 \times \overline{AD}^2 + \overline{AB}^2 \times \overline{AD}^2}{4}$$

oder

$$= \left(\frac{\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2}{4}\right) \times \overline{AD}^2;$$

aber das rechtwinklichte Dreyeck giebt

$$\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 = \overline{BC}^2;$$

es ist also

$$\overline{DAC}^2 + \overline{DAB}^2 = \frac{\overline{BC}^2 \times \overline{AD}^2}{4}.$$

Es sey ferner durch die Linie AD die Ebne DAE senkrecht auf CE gelegt, so wird sie BAC und DBC nach den auf BC senkrechten Geraden AE und DE schneiden; man wird also haben

$$ABC = \frac{BC \times AE}{2} \text{ und } BCD = \frac{BC \times DE}{2};$$

quadrirt man beyde Theile einer jeden dieser Gleichungen, und setzt man die ersten zu den schon gefundenen hinzu, so wird man finden

$$\overline{DAC}^2 + \overline{DAB}^2 + \overline{ABC}^2 = \frac{\overline{BC}^2 \times \overline{AD}^2}{4}$$

$$+ \frac{\overline{BC}^2 \times \overline{AE}^2}{4} = \left(\frac{\overline{AD}^2 + \overline{AE}^2}{4}\right) \times \overline{BC}^2.$$

In dem rechtwinklichten Dreyecke DAE hat man aber

$$\overline{AD}^2 + \overline{AE}^2 = \overline{DE}^2;$$

es ist also

$$\overline{DAC}^2 + \overline{DAB}^2 + \overline{BAC}^2 = \frac{\overline{BC}^2 \times \overline{DE}^2}{4},$$

oder $= \overline{BCD}^2$, vermittelst der zweyten der oben gefundenen Gleichungen.

Es würde leicht seyn, aus diesem Lehrsatze den im vorhergehenden Zusatze enthaltenen allgemeinen Satz herzuleiten.

Er wurde zuerst im IX Band der fremden Gelehrten von Linseau bekannt, Degua hat ihn kurz vor seinem Tode in einer Abhandlung der Academie der Wissenschaften als sein Eigenthum erklärt, in welcher er die dreyeckigten Pyramiden besonders abgehandelt hat *).

Von der Kugel.

§. 63. Aufgabe.

Die Lage und Größe des Kreises zu finden, welcher der Durchschnitt der Kugel und einer gegebenen Ebne ist.

Man braucht in dieser Absicht nur (Geom. §. 280) vom Mittelpuncte der Kugel auf die schneidende Ebne eine senkrechte Linie zu fällen, und nachdem man den Durchschnitt dieser Linie und der vorgelegten Ebne bestimmt hat, wird man den Mittelpunct des verlangten Kreises haben.

Die Operation wird sehr einfach, wenn man die Ebne der verticalen Projectionen DAB Fig. 44.

*) Dieser Satz ist für die Theorie der krummen Flächen eben so wichtig, als es der des rechtwinklichten Dreyecks zur Rectification der Curven ist.

auf dem gemeinschaftlichen Durchschnitt AC der vorgelegten mit der horizontalen Ebne senkrecht annimmt, welches immer geschehen kann; da alsdann O' und O'' die Projectionen des Mittelpunctes der Kugel sind, so wird, wenn man sie sich von einer durch die auf AC senkrechte Linie H'O' geführte Ebne durchschnitten denkt, diese Ebne durch den Mittelpunct der Kugel gehen, und die von diesem Puncte auf die vorgelegte Ebne DAC gefällte senkrechte enthalten; sie ist aber der verticalen Ebne DAB parallel; man kann sich demnach denken, daß sie an diese anschließt, ohne daß deshalb eine der Linien, welche sie enthält, weder in der Größe noch in ihrer Lage gegen den gemeinschaftlichen Durchschnitt H'G, welcher dann auf AB fällt, Veränderungen leidet. Dieses vorausgesetzt, wird M''E''N'' der größte Kreis seyn, welcher aus dem Durchschnitt der Kugel mit eben gedachter verticalen Ebne erfolgt; die senkrechte O''G'' wird (§. 35) die Projection G'' des Mittelpunctes des gesuchten Durchschnitts auf der verticalen Ebne bestimmen. Man kann daraus die horizontale Projection G' leiten; führt man (§. 51) diesen Mittelpunct C auf die Ebne DAC zurück, indem man sich diese an der horizontalen Ebne angeschlossen denkt, so kann man dann mit dem Halbmesser G''M'' den Kreis MN beschreiben, welcher der gemeinschaftliche Durchschnitt der Kugel und der vorgelegten Ebne seyn wird *).

---

*) Die Projection dieses Kreises auf der horizontalen Ebne würde eine Ellipse seyn, welche ihren Mittelpunct in G'

§. 64. Lehrsatz.

Wenn man zwey Puncte der Kugel durch eine gerade Linie verbindet, und in der Mitte ihrer Entfernung eine auf dieser Linie senkrechte Ebne errichtet, so wird diese Ebne durch den Mittelpunct der Kugel gehen.

Denn da diese Ebne durch alle von den beyden vorgelegten Puncten gleich weit entfernte Puncte gehet, so muß sie auch nothwendigerweise durch den Mittelpunct der Kugel gehen, welcher mit dieser Eigenschaft behaftet ist.

§. 65. Aufgabe.

Den Mittelpunct und den Halbmesser einer Kugel zu finden, wenn man die Lage von vier Puncten kennt, durch welche sie gehen muß.

Man verbinde auf jeder der coordinirten Ebnen die Projection eines dieser Puncte mit der den übrigen durch drey gerade Linien, welche die Projectionen der durch die gegebenen Puncte im Raume geführten Linien seyn werden. Man errichte dann aus der Mitte einer jeden dieser letztern eine darauf

---

und ihre kleine Axe der MN gleich hat; wir haben sie nicht konstruirt, weil der Kreis MN sich weit leichter beschreiben läßt, und die Stelle dieser Projection vertreten kann. Man sieht, daß $M''N'' : MN = AM'' : AM$, das heißt, daß sich die große Axe zur kleinen Axe verhält, wie der Halbmesser zum Cosinus des durch die Ebne des Kreises und der horizontalen Ebne gebildeten Winkels.

senkrechte Ebne. Da diese drey Ebnen den Mittelpunct der Kugel enthalten müssen, so wird er in ihrem Durchschnitte liegen, welchen man leicht finden kann. (§. 23, 25).

Was den Halbmesser der Kugel anbelangt, so ist er nichts anders als die Entfernung des Mittelpunctes von einem der gegebenen Puncte; und seine Construction ist leicht, sobald man die Lage dieses Mittelpunctes kennt.

Wir werden uns nicht ins Detail der zur Auflösung dieser Aufgabe erforderlichen Operationen einlassen, weil wir sie schon jede insbesondre aus einander gesetzt haben. Wir werden hier noch eine zweyte Auflösung in Rücksicht auf einen einfachern Fall als diesen allgemeinen hersetzen, von welchem man aber leicht zum allgemeinern gelangen kann.

Es seyen P', Q' und R Fig. 45. drey auf der horizontalen Ebne liegende Puncte; durch einen dieser Puncte R und durch den vierten E lege man die verticale Ebne DAB; man bestimme den Mittelpunct O' des durch die drey Puncte P', Q' und R gehenden Kreises. Es ist klar, daß die durch diesen Punct errichtete verticale durch den Mittelpunct der Kugel gehen wird. Es ist ferner leicht durch die Mitte H'' der die beyden Puncte R und F'' verbindenden Linie RF'' eine senkrechte Ebne zu legen, und diese Ebne wird die Projection der in O' errichteten verticalen in O'' schneiden. Durch dieses Verfahren erhält man die Projection des Mittelpunctes der Kugel auf der verticalen Ebne, und da

man sie schon auf der horizontalen Ebne hat, so wird es leicht seyn, den Halbmesser zu finden, welcher nichts anders als die Entfernung des Mittelpunctes von einem der gegebenen Puncte ist.

Es ist klar, daß sich dieses Verfahren an den allgemeinen Fall anschließt, wenn man zuvörderst die Ebne sucht, die durch irgend drey der gegebenen Puncte geht.

§. 66. Aufgabe.

Den Durchschnitt zweyer der Größe und Lage nach gegebenen Kugeln zu finden.

Es ist klar, daß dieser Durchschnitt ein Kreis ist; denn wenn man eine durch den Mittelpunct beyder Kugeln gehende verticale Ebne MNN′M′ annimmt, so wird sie diese respectiv nach ihren größten Kreisen G*I*E und G*I*F schneiden. Wir wollen nun annehmen, daß sich diese Kreise um die ihre Mittelpuncte verbindende Linie MN herumdrehen; so wird diese Bewegung beyde Kugeln zugleich erzeugen; die Puncte *I* und G werden deren gemeinschaftlichen Durchschnitt hervorbringen, welcher, wie man sieht zum Halbmesser GH hat, und in der auf MN senkrechten Ebne liegt.

Dieser gemeinschaftliche Durchschnitt ist gänzlich bestimmt; denn wir haben den Halbmesser *I*G mit welchem er beschrieben werden muß; die Ebne, in der er sich befindet, und welche auf MN senkrecht ist, kann durch GO′ und durch K′O′, die auf

AN' senkrecht ist, angegeben werden; man kann sogleich diesen Durchschnitt construiren. (§. 63).

§. 67. Zusatz.

Wenn man drey Kugeln hätte, so könnte man auf folgende Art die beyden Puncte finden, in denen sie sich zugleich schneiden.

Man combinire die erste mit der zweyten, um deren Durchschnitt zu finden, wie in der vorhergehenden Aufgabe geschehen ist; hiernächst verfahre man auf eine ähnliche Art mit der ersten und dritten; man würde auf diese Art zwey Ebnen haben, welche die gesuchten Puncte enthalten; und nachdem man in der einen die Gerade construirt hat, in welcher sie sich schneiden, so braucht man nur noch ihre Durchschnitte mit dem Kreise zu bestimmen, welcher der Durchschnitt einer der Kugeln mit der Ebne ist, auf welcher man construirt hat.

Ich überlasse es dem Leser, das Detail dieser Auflösung auszuführen, welches nach den bisher in diesem Werke gelehrten Methoden, mit mehr oder weniger Leichtigkeit geschehen kann; ich will nur noch den zu befolgenden Weg bey dem Fall anzeigen, wo die Mittelpuncte der drey Kugeln auf der horizontalen Ebne liegen. Es ist klar, daß man alle andre Fälle auf diesen zurück führen kann, wenn man die coordinirten Ebnen auf eine angemessene Art abändert.

Es seyen also M', N' und P' Fig. 47. die Mittelpuncte dreyer gegebenen Kugeln; es ist klar, daß

sich der gemeinschaftliche Durchschnitt der beyden ersten in der auf der Linie $G'I'$ errichteten verticalen Ebne liegen muß (vorherg. §). Nimmt man die erste Kugel mit der zusammen, welche ihr Centrum im Puncte P' hat, so kann man eine zweyte Linie $i'g'$ finden, durch welche die den gemeinschaftlichen Durchschnitt dieser Kugeln enthaltende Ebne gehen muß.

Der Punct H', welcher die Projection der Linie vorstellt, in welcher sich diese beyden verticalen Ebnen schneiden, wird auch die Projection der verlangten Durchschnittspuncte auf der horizontalen Ebne seyn.

Wenn man nun auf $g'i'$ den Kreis beschreibt, welcher der gemeinschaftliche Durchschnitt der zweyten und dritten Kugel ist, so wird man zwey Puncte H finden, welche HH' für den Abstand derjenigen geben werden, welche man auf der horizontalen Ebne sucht; der eine wird ober- und der andre unterhalb liegen.

Es ist leicht einzusehen, daß wir in diesem Zusatze folgende sehr interessante Aufgabe aufgelößt haben: **Die Projection eines Punctes zu finden, wenn man seine Entfernung von dreyen andern der Lage nach gegebenen Puncten kennt.**

§. 68. Zusatz.

Wenn man die Dreyecke $M'P'g'$, $N'P'K'$ und $N'M'I'$ aufrichtet, und sie um die Linien $P'M'$, $P'N'$ und $N'M'$ herumdrehen läßt, so werden sich

die Puncte g', K' und I' in einem einzigen vereinigen, und es entsteht daraus eine Pyramide, deren Basis das Dreyeck $M'N'P'$ und deren Gränzen die Halbmesser der gegebenen Kugeln sind. Wir haben also die Mittel eine dreyeckigte Pyramide zu construiren, von welchen man die Gränzen kennt, und deren Höhe, Winkel ꝛc. zu finden.

§. 69. Aufgabe.

Eine Ebne zu legen, welche eine Kugel in einem gegebenen Puncte berührt.

Man braucht in dieser Absicht nur (Geom. §. 289) durch den vorgelegten Punct einen Halbmesser zu führen, und eine Ebne zu construiren, welche auf dem äußersten Punct dieses Halbmessers senkrecht ist.

Alles dieses läßt sich leicht bewerkstelligen; es wäre nur noch gut, die Art anzumerken, nach welcher ein Punct auf der Oberfläche einer Kugel gegeben seyn kann. Zwischen den beyden Projectionen dieses Punctes existirt eine gegenseitige Abhängigkeit, welche bewirkt, daß wenn die eine beliebig genommen wird, die andre daraus unmittelbar erfolgt.

In der That sieht man zuvörderst, daß die Projection auf der horizontalen Ebne z. B. sich nicht außerhalb des Kreises befinden kann, dessen Halbmesser der der Kugel, und dessen Mittelpunct die Projection des Mittelpunctes dieser auf der horizontalen Ebne ist; denn wenn man sich eine Ebne vorstellt, welche durch den Mittelpunct der Kugel und zur horizontalen Ebne parallel geht, so wird sie die-

selbe nach einem größten Kreise schneiden, welcher, wenn er auf diese Ebne projicirt wird, keine Veränderung der Größe erleidet, weil alle herabgelassenen senkrechten, um die Projection zu erhalten, einen geraden Cylinder bilden, dessen Grundfläche immer den durch Ebnen, welche zur Grundfläche parallel sind, gemachten Durchschnitten gleich ist.

Dieses vorausgesetzt, so wird man, wenn der Punct P′ Fig. 48. für die Projection eines Punctes der Kugel auf der horizontalen Ebne genommen wird, leicht den Durchschnitt construiren können, welcher von der durch diesen Punct und den Mittelpunkt der Kugel gehenden verticalen Ebne gebildet wird, weil dieser Schnitt ein größter Kreis ist; und errichtet man die senkrechte P′P, so wird man die Erhöhung des vorgelegten Punctes über der horizontalen Ebne finden.

Der bloße Anblick der Figur zeigt, daß es zwey Puncte der Kugel giebt, welche dieselbe Projection auf der horizontalen Ebne haben; und um dem Puncte P die berührenden Ebnen zu führen, braucht man bloß in diesem Puncte auf jedem der Halbmesser MP eine senkrechte Ebne zu construiren, wie wir in §. 35 gesehen haben.

§. 70. Anmerkung.

Wir haben die Constructionen immer in den Ebnen vollzogen, welche sie wirklich enthalten, weil hieraus eine große Leichtigkeit entspringt, sich die Aufgaben vorzustellen, wenn sich dabey diese Ebnen

in ihrer natürlichen Lage, welche sie im Raume haben, aufgerichtet denkt.

Dieses sehr bequeme und öfters zu den Beweisen unentbehrliche Mittel, ist nicht immer für die Ausübung das angemessenste, weil es hierin darauf ankommt, die möglichst kleinste Anzahl Operationen zu errichten, besonders, wenn man im Großen arbeitet, um diese Operationen auf eine der Natur der hierzu gebrauchten Instrumente angemessene Art zu errichten.

Hierzu muß man von den in der Figur schon gezogenen Linien und eingeführten Ebnen Gebrauch machen, welches in der Auseinandersetzung der Auflösungen mehr Detail erfordert, und einigermaßen die Weitschweifigkeit derjenigen Beschreibungen entschuldigt, welche diesen Zweig der Geometrie nur von Seiten seiner Anwendungen auf die Künste beabsichtigten.

Was mich betrifft, der ich mir vorgesetzt habe, ihn auf eine geringe Anzahl einfacher und unter einander verbundener Aufgaben zurück zu führen, so mußte ich einen solchen Weg einschlagen, daß die Auflösung einer jeden Aufgabe leicht vorzutragen und zu vollziehen sey; um indessen zu zeigen, worin eigentlich die Vereinfachung, von der ich rede, bestehe, so will ich zeigen wie man bloß vermittelst einer verticalen und horizontalen Ebne, die Projectionen aller Puncte einer Kugel finden könne.

Es ist klar, daß man sich die Ebne P′M′MP Fig. 48. von ihrer Stelle aufgerichtet und dergestalt

stalt auf die coordinirte Ebne DAB übertragen denken kann, daß der rechte Winkel MM'P,' an den rechten Winkel M''MB anschließe; alle Constructionen, welche man an der rechten Ebne annimmt, deren Lage sich mit der des Punctes, welchen man betrachtet, ändert, lassen sich alsdann auf der zweyten für alle Fälle auf eine ähnliche Art vollziehen. Auf diese Art würde man *Mp* der M'P' gleich nehmen und *pp''* senkrecht auf AB errichten; diese wird den auf der Ebne DAB gezogenen größten Kreis der Kugel in zwey Puncten p'', p'' schneiden, welche die Höhen der Puncte P im Raume geben werden.

Wenn man endlich den Punct P' auf die Ebne DAB zurückführt, so wird man in P'' die verticalen Projectionen der beyden Puncte der Kugel haben, welche zum Puncte P' der horizontalen Ebne gehören.

Um die tangentirende Ebne zu führen, braucht man bloß durch den äußersten Punct des durch den gegebenen Punct gehenden Halbmessers der Kugel, eine auf diesem Halbmesser senkrechte Ebne zu legen, von welchem Puncte man auch schon die Projectionen hat.

§. 71. Aufgabe.

Durch eine gegebene Linie eine Ebne zu legen, welche eine gegebene Kugel tangentire.

Wir wollen uns erst nicht vorlegen, durch einen außerhalb der Kugel gegebenen Punct, eine sie be-

rührende Ebne zu legen, weil diese Aufgabe unbestimmt ist, wie man leicht sehen kann, wenn man sich vorstellt, daß sich die Ebne um den gegebenen Punct herumdreht; dieß kann immer geschehen, ohne daß sie deshalb aufhört, die Kugel zu berühren.

Ganz anders verhält es sich, wenn man sich eine gerade Linie vorlegt. Um diese Aufgabe aufzulösen, muß man durch den Mittelpunct der Kugel eine auf dieser Linie senkrechte Ebne legen, den Punct suchen, worin sie diese trifft, und durch diesen Punct den größten Kreis, welcher der Durchschnitt der Kugel und der auf der gegebenen Linie senkrechten Ebne ist, eine Berührungslinie führen; diese und die gegebene Linie bestimmen die verlangte Ebne.

Der Grund dieser Construction ist leicht einzusehen, wenn man sich durch den Mittelpunct der Kugel und durch die gegebene Linie F′E′ eine Ebne M′P′F′ gelegt, und ferner die auf dieser Linie senkrechte Ebne M′P′N′ Fig. 49. denkt; denn es folgt dann aus §. 35, daß die Ebne NP′F′ im Puncte N der Geraden M′N senkrecht ist, und daß sie folglich die Kugel im Puncte N berührt.

§. 72. Aufgabe.

Eine Ebne zu führen, welche auf dreyen der Größe und Lage nach gegebenen Kugeln ruhe.

Es sey Fig. 50. eine Tangente HM geführt, welche den beyden Kreisen gemein ist, die Durchschnitte der ersten und zweyten Kugel mit der hori-

zontalen Ebne sind, und deren Mittelpuncte sich in F und E befinden; man stelle sich dann vor, daß sich der Winkel HMF und alles was er enthält, um die Linie MF drehe; die beyden Umkreise, welche ihre Mittelpuncte auf dieser Linie haben, werden die beyden vorgelegten Kugeln erzeugen, die unaufhörlich von der Linie HM in allen verschiedenen Lagen, welche sie annehmen kann, berührt werden. Alle diese Lagen zusammen werden einen geraden Kegel bilden; denn die Berührungspuncte werden alle auf den aus den Puncten H und K beschriebenen Kreisen liegen.

Zu eben den Folgerungen gelangt man bey den Kugeln, deren Mittelpuncte F und G sind, und die Linie OL wird ebenfalls einen geraden Kegel erzeugen, welcher diese beyden Körper umgeben wird.

Dieses vorausgesetzt, sieht man offenbar, daß die aus den auf einerley Kugel liegenden Puncten O und H beschriebenen Kreise, sich in einem Puncte schneiden werden, welcher zugleich zu beyden einschließenden Kegeln gehört, und dessen Projection auf der horizontalen Ebne man finden kann, wenn man OR und HR respectiv auf FL und FM senkrecht führt, weil diese Geraden die Durchschnitte dieser Ebne mit denjenigen vorstellen, in welchen sich die Kreise, von denen die Rede ist, befinden.

Nachdem man den Punct, dessen horizontale Projection R ist, construirt hat, so wird jede von diesem Puncte nach den Scheiteln L und M der ein-

schliessenden Kugel gezogene gerade Linie zwey der drey Kugeln berühren, und sie werden eine Ebne bestimmen, welche alle drey berührt. Diese wird die horizontale Ebne in der Linie LM schneiden, welche die Scheitel der Kegel verbindet; man braucht sie nur noch zu unterwerfen eine der drey Kugeln zu berühren, oder durch den Punct zu gehen, dessen Projection auf der horizontalen Ebne R ist, welches leicht geschehen kann.

§. 73. Anmerkung.

Die vorgelegte Aufgabe ist also darauf zurückgeführt, die Durchschnittspuncte L und M der den beyden Kreisen gemeinschaftlichen Tangenten mit der Linie zu finden, welche ihre Mittelpuncte verbindet.

Diese Aufgabe, welche ein Gegenstand der gewöhnlichen Geometrie ist, schlägt nicht in unsren Gegenstand ein; da sie sich indessen in keinem Elementarbuche befindet, so wollen wir davon eine Auflösung geben, deren Verfasser unbekannt ist, die aber ihrer Einfachheit wegen merkwürdig ist.

Auf der Entfernung GF beyder Mittelpuncte, als auf einem Durchmesser, beschreibe man den Halbkreis FPG; man beschreibe ferner aus dem Puncte F als Mittelpunct einen Kreisbogen mit einem Halbmesser FQ, welcher der Differenz FQ, welcher der Differenz der Halbmesser der gegebenen Kreise gleich ist, und durch den Punct P, wo dieser Bogen den ersten trifft, führe man den Halbmesser OF, welcher auf dem Umkreise des größern der beyde gegebe-

nen Kreise den Punct O bestimmen wird, durch welchen ihre gemeinschaftliche Tangente geführt werden muß.

Der Beweis dieser Construction ist sehr einfach. Es ist leicht einzusehen, daß der Winkel FPG ein rechter ist; woraus folgt, daß OL der PG parallel ist und sich von derselben um die Größe OP, welche nach der Construction dem Halbmesser NG des kleinern Kreises gleich ist, entfernt findet.

§. 74. Zusatz.

Wenn man sich einen dritten Kegel vorstellt, der die beyden Kugeln umgiebt, deren Mittelpuncte in E und G sind, so folgt aus dem eben Gesagten, daß dieser Kegel aus allen Geraden gebildet seyn wird, welche diese beyden Kugeln zugleich berühren; er enthält also auf seiner Fläche die Linie, welche die Berührungspuncte eines jeden derselben mit der in Vorhergehenden construirten Ebne verbindet. Dieser Kegel wird also von der Ebne, worauf es hier ankommt, berührt werden, und dies nach der ganzen Ausdehnung einer geraden Linie, welche nothwendigerweise durch seinen Scheitel gehen muß, welcher Punct sich auch in der Ebne befinden wird, die die Mittelpuncte der vorgelegten Kugeln enthält; er liegt also auf dem Durchschnitt LM dieser Ebne und der tangentirenden Ebne.

Hieraus fließt natürlich diese Folgerung, daß die Berührungspuncte der drey Kreisen zu zwey und zwey combinirt, gemeinschaftlichen Tangenten,

in einer geraden Linie liegen, ein Satz, welchen ich dem Herrn Menge verdanke*).

---

*) Der Durchschnittspunct der den beyden Kreisen gemeinschaftlichen Tangenten kann sich auch zwischen beyden Kreisen befinden; aus eben dieser Ursache kann man auch dreyen Kugeln gemeinschaftliche tangentirende Ebnen führen, welche sie nicht überall von einerley Seite berühren. Es könnte zum Beyspiel verlangt werden, daß die eine derselben unterwärts, und die beyden andern in ihren obern Theilen berührt würden. Nimmt man diese Bedingungen zusammen, so wird sich finden, daß die Aufgabe des §. 72 acht Auflösungen erleiden kann, die sich aber alle aus einer und derselben Construction herleiten lassen; und es genügt uns, sie angezeigt zu haben, ohne in die Details derselben einzudringen, welche keine nützliche Anwendung haben.

Ende der ersten Abtheilung.

Zweite Abtheilung.

Von der Entstehung der Flächen.

In allen Aufgaben, welche uns bisher beschäftigten, haben wir die gesuchten Puncte vermittelst der Durchschnitte mehrerer Ebnen bestimmt, und wir haben sie als aufgelöst betrachtet, sobald wir die Lage dieser Ebnen anzugeben im Stande waren.

Eine weit ausgedehntere Gattung von Aufgaben hängt von den krummen Flächen ab. Es ist daher zweckmäßig, bevor wir sie aufzulösen suchen, diese Flächen kennen zu lernen.

So wie eine in einer Ebne gezogene krumme Linie, eine Reihe Puncte enthält, die von allen andern durch eine gemeinschaftliche Eigenschaft, oder, welches auf eins hinaus läuft, durch Verhältnisse zwischen gewissen von diesen Puncten nach gegebenen

Linien oder Puncten gezogenen Geraden unterschieden sind, eben so ist eine krumme Fläche, eine Zusammensetzung mehrerer Puncte im Raume, welche mit einer gemeinschaftlichen Eigenschaft behaftet sind, oder welche gewisse Beziehungen zwischen den von diesen Puncten nach gegebenen Linien oder gegebenen Ebnen gezogenen Geraden veranlassen.

Ein Punct, welcher sich in einer Ebne nach irgend einem Gesetze bewegt, beschreibt eine Curve. Eine krumme Linie, welche sich im Raume bewegt, oder welche zugleich ihre Größe und Lage ändert, ohne deshalb ihre Natur zu ändern, erzeugt eine krumme Fläche, welche nichts anders, als eine Zusammensetzung der Lagen in welche sie kam, oder der Gestalten ist, die sie successiv angenommen.

Wir wollen zuvörderst die aus geraden Linien zusammengesetzten Flächen betrachten.

Von den Kegelflächen.

§. 75.

Denkt man sich, eine im Raume sich bewegende gerade Linie, sey unterworfen beständig durch einen gegebenen Punct zu gehen, und dem Umkreise einer der Lage nach in einer Ebne gegebenen Curve zu folgen, so wird sie eine Fläche beschreiben, von der der Kegel nur ein besondrer Fall ist, in welchem die zur Direktion der Bewegung der geraden Linie ge-

nommene Curve ein Kreis ist. Diese Fläche construiren, heißt nichts anders als die Lage aller ihrer Puncte gegen eine gegebene Ebne anzugeben, und dieser Zweck ist erreicht, sobald man dahin gelangt ist, für jeden Punct der horizontalen Ebne die Höhe des ihm in der vorgelegten Fläche correspondirenden Punctes, oder seine Projection auf einer gegebenen verticalen Ebne zu finden.

Wenn die Flächen dieser Art von Ebnen geschnitten werden, welche unterworfen sind durch den Scheitel zu gehen, so sind die Schnitte gerade Linien. Legt man durch irgend einen Punct der horizontalen Ebne und durch den Scheitel des Kegels eine verticale Ebne, so wird ihr Durchschnitt mit der gegebenen Curve einen Punct der gesuchten geraden Linie geben, welche auch durch den Scheitel des Kegels gehen muß. Da sich diese Linie gänzlich auf der Fläche des Kegels befindet, so wird sie die Lage einer unendlichen Anzahl Puncte dieser Fläche angeben.

Werden Kegelflächen von Ebnen, welche zu einander parallel sind, geschnitten, so werden alle diese Schnitte einander ähnliche Curven seyn.

Die Kegel sind gegen die Pyramiden eben das, was die Curven gegen die eingeschriebenen und umschriebenen Vielecke sind.

Es sey z. B. die Curve H'X' Fig. 51 auf der horizontalen Ebne gezogen, und wir wollen annehmen, daß die Gerade MH', welche sich längs dieser Curve bewegen muß, unterworfen sey, beständig durch

den Punct M zu gehen: so kann man die Höhe PP′ des mit dem Puncte P′ der horizontalen Ebne, auf der vorgelegten Fläche correspondirenden Punctes P folgendermaßen finden.

Denkt man sich eine durch den Punct P′ und durch den Scheitel M gehende verticale Ebne, so wird diese Ebne die Kegelfläche nach einer geraden Linie schneiden, auf welcher sich der gesuchte Punct befinden muß; es kommt also nur noch darauf an, diese Ebne und die Linie, welche sie enthält, zu construiren. Verbindet man den Punct P′ mit der Projection M′ des Scheitels des Kegels, so wird man die Linie M′H′ haben, welche der der Durchschnitt eben erwähnter Ebne mit der horizontalen, oder die Projection der durch den gesuchten Punct auf dem Kegel geführten Geraden seyn wird. Es ist klar, daß H′ der Punct ist, in welchem diese letztere die Curve treffen wird; man hat also um sie zu bestimmen, zwey Puncte H′ und M, welche auf die verticale Ebne in *H* und M″ gebracht, ihre Projection *H*M″ geben; führt man auch P′ auf dieselbe Ebne in P′ zurück, so wird *PP″* die gesuchte Höhe seyn.

Wenn X′H′ ein Kreis wäre, so würde man den in den Anfangsgründen unter dem Namen des schiefen Kegels bezeichneten Kegel haben, und wenn der Punct M′ der Mittelpunct dieses Kreises ist, so wird die erzeugte Fläche die des geraden Kegels seyn. In allen andern Fällen entsteht eine analoge Fläche, welche wir immer mit dem Namen des Kegels be-

legen, weil wir immer mit diesem Worte den Begriff einer aus geraden in einem einzigen Puncte sich schneidenden Linien zusammen gesetzten Fläche verbinden werden.

Da eine gerade Linie ihrer Natur noch unbegränzt ist, so folgt, daß man sich die erzeugende Linie, so weit als man will, oberhalb des Punctes M verlängert denken kann; die durch diesen Theil erzeugte Fläche, wird ein eben dergleichen Kegel seyn als der, welcher von dem unterhalb des Punctes M liegenden Theil der Geraden erzeugt worden, und beyde zusammen werden nur eine einzige Fläche zusammensetzen, von der die beyden ersten Theile angesehen werden können, wie bey den Curven die Aeste.

Ueberhaupt muß man alle Theile als zu einer und derselben Fläche gehörig ansehen, wenn sie entweder durch eine und dieselbe Bewegung, oder durch einerley Curve in ihrer ganzen Ausdehnung betrachtet, erzeugt wird.

Von den cylindrischen Flächen.

§. 76.

Wir haben die Bewegung der geraden erzeugenden Linie in den Flächen, welche wir bisher betrachtet haben, durch zwey Bedingungen bestimmt; 1) beständig durch einen und denselben Punct zu ge-

hen; 2) dem Umkreise einer Curve zu folgen. Wir wollen nun annehmen, daß die erzeugende Linie, in allen Lagen, welche sie annimmt, indem sie sich längs der gegebenen Curve Q'Q' Fig. 52 bewegt, sich immer parallel bleibt. Die auf diese Art erzeugte Fläche ist der in den Anfangsgründen beschriebenen des Cylinders analog, und sie würde der Cylinder selbst seyn, wenn die Curve QQ ein Kreis ist.

Wir wollen nun untersuchen, worauf sich die Construction der vorgelegten Fläche gründet.

Es ist klar, daß wenn man sie durch verticale und der erzeugenden Linie parallele Ebnen schneidet, die Schnitte nur gerade dieser letztern parallele Linien seyn können.

Um die verticale Ordinate zu finden, welche mit irgend einem Puncte der horizontalen Ebne überein stimmt, braucht man bloß durch diesen Punct eine verticale der erzeugenden Linie parallele Ebne zu legen, und ihren gemeinschaftlichen Durchschnitt mit der vorgelegten Fläche zu construiren; dies kann leicht geschehen, weil der Durchschnitt der verticalen Ebne mit der gegebenen Curve einen Punct der gesuchten Linie geben wird, welche überdieß der erzeugenden Linie parallel ist.

Die von einander parallelen Ebnen geschnittenen cylindrischen Flächen geben immer einerley Curve.

Diese Flächen sind gegen die Prismen eben das, was die Curven gegen die eingeschriebenen und umschriebenen Vielecke sind.

Das Verfahren, um die cylindrischen Flächen zu construiren, besteht in Folgendem. Es sey N′ Fig. 52 der gegebene Punct auf der horizontalen Ebne; man führe durch diesen Punct die Linie N′Q′ der H′P′ als der horizontalen Projection irgend einer der erzeugenden Linien des Cylinders parallel; diese Linie wird die vorgelegte Curve in einem Puncte Q′ schneiden, den man auf die verticale Ebne Q zurückführt; führt man alsdann QN″ der P″H″ als der verticalen Projection der angenommenen erzeugenden Linie, parallel, so wird man den Punct N′ auf die verticale Ebne in *N* zurück führen, und die der AD parallele N″*N* wird die verlangte Höhe seyn*).

Wenn die erzeugenden Linien auf der Ebne der Grundfläche senkrecht, und die gegebene Curve ein Kreis wäre, so würde der Cylinder derjenige seyn, den man in den Anfangsgründen mit dem Nahmen des geraden Cylinders belegt.

Ueberhaupt wird immer, von welcher Beschaffenheit auch die Curve Q′Q′ seyn mag, dieselbe immer die horizontalen Projectionen der auf der vorgelegten cylindrischen Fläche befindlichen Puncte enthalten, wenn die erzeugende Linie auf der horizonta-

---

*) Es ist nicht durchaus nothwendig, daß die Linie, deren Projectionen H′P′ und H″P″ sind, in einer der Lagen der erzeugenden Linien des Cylinders sey; sondern es ist hinreichend, wenn sie ihr parallel ist.

len Ebne, in welcher diese Curve beschrieben ist, senkrecht steht.

Von den Curven von gedoppelter Krümmung.

§. 77.

Nimmt man auf der Oberfläche eines Cylinders eine Reihe Puncte nach irgend einem Gesetze an, so wird das Ganze dieser Puncte eine Curve bilden, welche sehr selten in allen ihren Theilen in einerley Ebne liegen wird; die horizontale Projection dieser Curve wird die Basis des Cylinders auf der horizontalen Ebne seyn. Wir wollen uns ferner von jedem der Puncte, von denen die Rede ist, auf die verticale Ebne senkrechte Linien gefällt denken, so wird das Ganze dieser senkrechten eine zweyte cylindrische Fläche bilden, welche die erste nach der durch die Reihe der vorgelegten Puncte begränzten Curve schneiden wird; und die Durchschnitte der senkrechten Linien mit der verticalen Ebne werden eine Curve bilden, die auf dieser Ebne die Basis des zweyten Cylinders, und folglich die Projection aller Curven sind, welche man auf diesem Cylinder ziehen kann. Hieraus folgt, daß sie auch zur Curve gehören wird, nach welcher die beyden betrachteten Cylinder einander schneiden.

Diese Curve wird durch ihre beyde Projectionen bestimmt seyn; denn sie ist durch den Durchschnitt zweyer cylindrischen Flächen gegeben, von de-

nen jeder auf einer der coordinirten Ebnen senkrecht ist, so wie eine gerade Linie durch den Durchschnitt ihrer beyden projicirenden Ebnen gegeben ist. Die Cylinder vertreten hier die Stelle der Ebnen; allein zwey Ebnen bestimmen durch ihren Durchschnitt eine gerade Linie, hingegen bestimmt der Durchschnitt zweyer krummen Flächen eine krumme Linie, deren Puncte nicht alle in einer und derselben Ebne seyn können. Hieraus entsteht die Abtheilung der Curven in ebne Curven, und in Curven von gedoppelter Krümmung. Die ersten haben alle ihre Puncte in einer und derselben Ebne liegen; dieß ist aber nicht bey letztern der Fall, welche immer nur eine bestimmte Anzahl Puncte in einerley Ebne haben.

Um ein sehr einfaches Beyspiel von dieser Gattung von Curven zu geben, wollen wir annehmen, man habe einen geraden Cylinder, dessen Basis ein Kreis ist, und nachdem man auf die Oberfläche desselben den Fuß eines Zirkels eingesetzt, der immer fest bleibt, lasse man den andern Fuß dergestalt herumbewegen, daß die Spitze desselben immer auf der Oberfläche des Cylinders bleibt; dieser letztere wird offenbar eine Curve von gedoppelter Krümmung erzeugen, deren Puncte alle von dem, auf welchem der feste Schenkel des Zirkels stand, gleich weit entfernt seyn werden. Diese Curve wird also einen Theil einer Kugel ausmachen, welche die Oeffnung des gegebenen Zirkels zum Halbmesser hat; sie wird also der Durchschnitt des vorgelegten Cylinders mit dieser Kugel seyn.

Dieses Beyspiel zeigt hinreichend, wie die Curven aus dem Durchschnitte der Flächen entstehen; wir wollen uns daher die Aufgaben in Betreff der Curven für den Abschnitt vorbehalten, in dem wir vom Durchschnitte der Flächen handeln werden.

Aus dem Vorhergehenden entsteht nun eine Ausdehnung beyder Arten von Flächen, welche wir eben betrachtet haben, nehmlich der Kegel- und der cylindrischen Flächen; denn man kann statt der ebnen Curven, welche wir in beyden Fällen zur Direktion der Bewegung der erzeugenden Linie gewählt haben, Curven von gedoppelter Krümmung wählen.

Der Umstand veranlaßt keine Schwierigkeit bey der Construction der conischen und cylindrischen Flächen; denn da die Leit-Curve alsdann durch ihre beyde Projectionen gegeben ist, so kann man, nachdem der Punct gefunden ist, in welchem eine durch den Scheitel des Kegels, oder parallel zur erzeugenden Linie des Cylinders geführte verticale Ebne, die horizontale Projection dieser Curve schneidet, diesen Punct auf seine verticale Projection zurückführen, und man wird einen Punct der verticalen Projection der Geraden finden, welche zum vorgelegten Cylinder und Kegel gehört; es bleibt alsdann nur noch übrig, diese Gerade nach den in den vorgehenden §. §. gegebenen Bedingungen zu führen.*)

Von

---

*) Man belegt mit dem Nahmen der Curven von gedoppelter Krümmung diejenigen, in denen nicht alle Puncte in

Von den durch Umdrehung entstehenden Flächen.

§. 78.

Die Kugel, mit der wir uns schon öfters beschäftigt haben, wird durch die Bewegung eines Halbkreises um seinen Durchmesser erzeugt; man kann offenbar statt des Halbkreises eine beliebige Curve substituiren, welche sich um eine in ihrer Ebne genommene Linie dreht. Die hieraus entstehenden Flächen, welche wir mit dem Namen der **durch Umdrehung entstandenen Flächen** belegen wollen, haben die gemeinschaftliche Eigenschaft, daß ihre Durchschnitte mit Ebnen, welche auf der Umdrehungsaxe senkrecht stehen, Kreise sind.

Wird jede derselben von einer durch diese Axe gehende Ebne geschnitten, so entsteht die sie erzeugende Curve. Dieß sind die merkwürdigsten Eigenschaften der durch Umdrehung erzeugten Flächen, und sie sollen uns zur Construction derselben dienen, wie wir gleich zeigen werden.

---

in einerley Ebne liegen, weil sie, indem sie aus dem Durchschnitte zweyer krummen Flächen entstehen, die Krümmung einer jeden zertheilen. Man kann hiervon ein sinnliches Bild haben, wenn man eine in einer Ebne gezogene Curve annimmt, und diese Ebne seitwärts bewegen, oder auf irgend eine Art über einander rollen läßt; die vorgelegte Curve nimmt alsdann eine neue Krümmung an, welche aus der erfolgt, welche diese Ebne erhalten hat.

Wir wollen zuvörderst annehmen, die Umdrehungsaxe sey auf der verticalen Ebne senkrecht; es ist klar, daß eine Ebne, welche dieser parallel ist, die vorgelegte Fläch^ nach einem Kreise schneiden wird, welcher die Ordinate der erzeugenden Curve zum Halbmesser haben wird.

Um diese Construction auszuführen, braucht man sich nur diesen Körper von einer durch die Umdrehungsaxe gehenden horizontalen Ebne geschnitten zu denken; der hierdurch entstehende Schnitt wird die erzeugende Curve seyn, welche, weil sie sich in einer zur horizontalen parallelen Ebne befindet, ihre Natur nicht ändert, wenn sie auch auf diese letztere projicirt wird.

Es sey also K′N′ Fig. 53 diese Curve; durch den vorgelegten Punct P′ führe man ihr die Ordinate M′N′; diese wird der Halbmesser des Kreises seyn, welcher den gesuchten Punct enthalten muß. Da sich dieser Kreis in der durch den Punct P′ gehenden verticalen N′M′M befindet, so wird er zur Projection auf der verticalen Ebne DAB einen Kreis von demselben Halbmesser haben, dessen Mittelpunct in M″ als dem Durchschnitte der Umdrehungsaxe mit dieser Ebne seyn wird. Führt man endlich den Punct P′ in *P* zurück, und errichtet *PP*″, so wird man die verticale Ebne P′*PP*″ haben, welche den vorgelegten Kreis in zweyen Puncten P schneiden wird, deren verticale Projectionen P″ sind.

§. 79.

Die Flächen, welche wir eben betrachtet haben, sind durch eine einzige Curve bestimmt; es giebt auch andre, zu denen man zwey oder eine größere Anzahl anwenden muß; bevor wir von der Entstehung dieser letztern einige Beyspiele geben, wollen wir von den Durchschnitten der ersten mit einander handeln.

Von den Durchschnitten der krummen Oberflächen.

§. 80.

Die natürlichste und allgemeinste Methode, die Durchschnitte der krummen Oberflächen zu construiren besteht darin, sich dieselben durch Ebnen geschnitten zu denken, welche unter gewissen Bedingungen geführt sind. Wenn man die durch eine und dieselbe Ebne in jeder der beyden vorgelegten krummen Oberflächen gemachten Schnitte bestimmt hat, so werden die Puncte, welche diesen beyden Curven gemein sind, nothwendigerweise im gesuchten Durchschnitte liegen, weil sie sich auf beyden krummen Oberflächen zugleich befinden.

Die schneidenden Ebnen können einer der coordinirten Ebnen parallel geführt werden. Wir wollen annehmen, daß dieses der verticalen Ebne geschehe: so ist es leicht die Curven zu construiren, nach denen sie die vorgelegten Oberflächen schneiden müssen; denn alle Puncte dieser Curven werden ihre

horizontale Projectionen in der Geraden haben, welche der gemeinschaftliche Durchschnitt der sie enthaltenden schneidenden Ebne und der horizontalen ist; und da sie auf krummen Oberflächen liegen, deren Construction bekannt ist, so ist es leicht, die Höhe eines jeden derselben über seine Projection zu finden. Da die schneidende Ebne der verticalen parallel ist, so kann man alles was die erste enthält auf die zweyte übertragen, ohne daß die darin sich befindenden Linien an ihrer Größe oder gegenseitigen Lage Veränderungen leiden; und folglich wird man im Durchschnitte der auf der verticalen Ebne gezeichneten Schnitte unmittelbar die Projection eines Punctes des Durchschnitts beyder vorgelegten Oberflächen haben.

Wiederholt man die angezeigten Operationen, so kann man so viele Puncte dieses Durchschnitts als man will finden.

Die eben auseinander gesetzte Methode kann sich auf alle krumme Oberflächen überhaupt erstrekken; man sieht aber, daß dieselbe erfordern würde für jeden Punct der Durchschnitte dieser Oberflächen zwey Curven zu construiren, und in sehr vielen Fällen ereignet es sich, daß wenn man die schneidenden Ebnen auf eine angemessene Art wählt, die zu construirenden Curven nur gerade Linien oder Kreise sind, und mithin nur eine einzige Operazion erfordern, um alle ihre Puncte zu finden. Man gelangt besonders zu sehr einfachen und leichten Constructionen, wenn man sich so viel als möglich an der Entste-

hung der Oberflächen hält, deren Durchschnitt man sucht; und man erhält solche, wenn man öfters auf das System der schneidenden Ebnen Verzicht leistet, um krumme Oberflächen zu brauchen, deren Durchschnitte mit jeder der vorgelegten leicht zu bestimmen sind.

Besondre Exempel werden unsre allgemeinen Begriffe, die anfangs verwickelt scheinen möchten, deutlicher machen, und zeigen, wie man sich in den Fällen zu verhalten habe, die hier nicht besonders erwähnt werden.

§. 81.

Den Durchschnitt eines Cylinders und einer Kugel zu construiren.

Man nehme zur Ebne der horizontalen Projectionen eine der erzeugenden Linie des Cylinders parallele Ebne an, und zur verticalen die auf dieser Linie senkrechte Ebne.

Denkt man sich dann die schneidenden Ebnen der horizontalen parallel, so werden sie den Cylinder nach geraden Linien schneiden, welche seiner Axe parallel sind, und die Kugel in Kreisen, deren Mittelpunct mit ihrem eignen Mittelpuncte in einerley Punct der horizontalen Ebne projicirt seyn würde; die Halbmesser würden dann nach dem was §. 63 gelehrt worden, leicht zu finden seyn.

Diese Constructionen können vermittelst der diesem §. vorhergehenden Begriffe leicht vollzogen werden; auch wollen wir hier wenig Auseinandersetzun-

gen davon geben; denn wir bemerken hiermit ein für alle Mahl, daß wenn ein Mahl angezeigt worden, wie die die Aufgabe auflösenden Ebnen oder Linien geführt werden müssen, man entledigt zu seyn glauben kann, von neuem die Verfahrungsarten zu erklären, welche einen Theil der schon aufgelösten Aufgaben ausmachen.

Im gegenwärtigen Falle hat man Fig. 54. in der verticalen Ebne der AB gerade Linien $g''i''$ parallel geführt; sie sind die gemeinschaftlichen Durchschnitte dieser Ebne mit der schneidenden Ebne, welche man horizontal annimmt, $g''i''$ ist offenbar der Halbmesser des Kreises, in welchem diese Ebnen die Kugel, deren Mittelpunct auf der verticalen Ebne in E'' und auf der horizontalen Ebne in E' projicirt ist, schneiden.

Die Puncte P_1'' und P_3'', in denen die Linie $g''i''$ die Basis des Cylinders trifft, sind die verticalen Projectionen der beyden auf seiner Oberfläche liegenden Geraden, deren jede von dem in der durch $g''i''$ geführten horizontalen Ebne liegenden Kreis der Kugel in zweyen Puncten geschnitten wird.

Man beschreibe daher aus dem Puncte E' als einem Mittelpuncte mit einem der $g''i''$ gleichen Halbmesser einen Kreis; so werden die Puncte p_1', p_3', P_1', P_3', worin er die Projectionen der Geraden, von denen die Rede ist, schneidet, zum gesuchten Durchschnitt der Kugel und des Cylinders gehören.

Durch dasselbe Verfahren kann man so viele Puncte dieses Durchschnitts als man will bestimmen;

allein diejenigen, die man zuerst bestimmen muß, sind seine Gränzen. In dem Exempel, welches uns jetzt beschäftigt durchdringt der Cylinder die Kugel gänzlich und trifft sie folglich zwey Mahl, nehmlich bey seinem Eingange und Ausgange; jede Operation giebt zugleich Puncte des einen und des andern dieser Schnitte, die nicht mit einander verwechselt werden dürfen, und wozu man gelangt, wenn man die gegenseitige Lage dieser beyden Körper darstellt. Man sieht alsdann, daß die größte Breite dieser Schnitte sich in der durch die Axe des Cylinders geführten schneidenden Ebne befinden muß; daß die unterhalb dieser Ebne befindlichen Puncte diejenigen sind, worin die Schnitte einander immer mehr nähern, und daß im Gegentheile die oberhalb befindlichen Puncte zu den Zweigen der entfernt gelegenen Schnitte gehören.

Durch Hülfe dieser Betrachtungen wird man leicht einsehen, daß P_1', P_3', P_4', P_2' die Projection auf der horizontalen Ebne des Einganges des Cylinders ist, und p_1', p_3', p_4', p_2' die des Ausganges. Was die verticale Projection betrifft, so ist sie beyden gemein; sie ist der Kreis, welcher zur Basis des Cylinders auf der verticalen Ebne dient.

Die folgende Figur 55 stellt mit denselben Buchstaben den Fall dar, wo der Cylinder nicht nach seinem ganzen Durchmesser in die Kugel geht. Es ist klar, daß die Puncte L_1'' und L_2'' als-

dann die Gränzen geben, und daß der Schnitt einfach ist *).

§. 82. Aufgabe.

Die Projectionen der Curve zu finden, welche der Durchschnitt eines Kegels und einer Kugel ist.

Man lasse die schneidenden Ebnen durch den Scheitel gehen und nehme sie auf der horizontalen Ebne senkrecht an. Durch dieses Mittel werden die in dem Kegel gemachten Schnitte, gerade leicht zu bestimmende Linien seyn, und die der Kugel werden Kreise seyn, von denen man den Mittelpunct und den Halbmesser nach dem Verfahren des §. 63 finden kann.

Dieses wäre hinreichend, um diejenigen, welche mit den Constructionen, die wir gegeben haben, vertraut sind, in den Stand zu setzen, die vorgelegte Aufgabe aufzulösen. Wir wollen nur noch ein dem des §. 70 analoges Verfahren anmerken, welches die Operation ein wenig abkürzt.

Es sey Fig. 56 in der horizontalen Ebne die Gerade $S'K'$ geführt, welche den gemeinschaftlichen Durchschnitt dieser und der durch den Scheitel des Kegels gehenden verticalen Ebne vorstellt, welcher Punct seine Projectionen in S' und S'' hat. Anstatt nun diese letztere Ebne umzudrehen, indem man sie

*) In beyden Fällen sind, analytisch geredet, die Schnitte nur eine und dieselbe durch eine einzige Gleichung gegebene Curve.

um $S'K'$ bewegen läßt, trage man sie vielmehr auf DAB über, indem man die Linie $S'K'$ dergestalt auf AB legt, daß der Punct S' in S fällt. Nimmt man dann $Sk = S'K$, so kann man die Geraden $S''k$ führen, welche die Durchschnitte des Kegels mit der schneidenden Ebne seyn werden (§. 75); macht man dann $mg = S'G'$, so wird der Punct g die Lage des Mittelpunctes des Kreises seyn, in welchem die schneidende Ebne die Kugel trift; denn er stimmt oberhalb G' mit einer Höhe überein, welche der des Mittelpunctes dieser Kugel gleich ist, den man in E' und E'' projicirt sieht; endlich ist der Halbmesser dieses Kreises die der $G'H'$ gleiche gh (§. 63).

Die Puncte p in denen der Kreis von welchem geredet wird, die Geraden $S''k$ schneidet, gehören zum Durchschnitte des Kegels und der vorgelegten Kugel. Die Anzahl derselben ist vier, nehmlich zwey befinden sich auf der beym Eingange des Kegels in die Kugel gebildeten Curve, und zwey auf der aus seinem Ausgange erfolgenden. Man kann hier die Betrachtungen anwenden, welche wir bey dem Falle für den Cylinder gemacht haben.

Die Puncte p liegen in der schneidenden Ebne; um ihre Projectionen zu erhalten, muß man $S'P'$ der pi gleich nehmen, und der Punct P' wird die Projection auf der horizontalen Ebne seyn; errichtet man dann $P'P''$ senkrecht auf AB, so wird die verticale Projection P'' sich auf dem Durchschnitte dieser Geraden und der pi befinden; denn da der Punct p auf einer verticalen Ebne genommen ist, so

liegt er mit seiner Projection auf jeder andern verticalen Ebne in einerley Höhe.

Um endlich die Figur nicht zu sehr zu verwikkeln, ist die Operation nur an einem einzigen der Puncte p vollzogen worden; allein sie findet ungeändert bey den drey übrigen Puncten statt.

Obgleich die Basis des in der Figur vorgestellten Kegels ein Kreis ist, so sieht man doch leicht ein, daß die Construction sich auch auf jeden andern Fall ausdehnen läßt, weil keine von den den Kreis characterisirenden Eigenschaften angebracht sind.

§. 83. Aufgabe.

Den Durchschnitt zweyer Kegel zu construiren.

Wir wollen mehrerer Einfachheit wegen annehmen, daß die vorgelegten Kegel ihre Grundflächen in einer und derselben Ebne haben; das heißt, daß man die Curve kennt, nach welcher jede derselben eine der coordinirten Ebnen, die horizontale zum Beyspiel, schneidet. Wir werden gleich sehen, daß die Aufgabe immer auf diesen Zustand gebracht werden kann.

Dieses vorausgesetzt, so denke man sich durch die die Scheitel der vorgelegten Kegel verbindende Linie eine Ebne gelegt, welche sich um diese Linie herum bewegt. Diese Ebne wird in jeder der Lagen, in der sie die Kegel trift, sie nach vier Geraden schneiden, nehmlich in zwey den einen, und in zwey den andern Kegel; und da sie in einerley

Ebne liegen, so werden die zum ersten gehörigen die ihnen auf dem zweyten correspondirenden in Puncte schneiden, welche einen Theil des gemeinschaftlichen Durchschnitts dieser Flächen ausmachen.

Es seyen S' und S'', s' und s'' Fig. 57. die Projectionen der Scheitel der Kegel; F'F' und f'f die Curven, welche ihnen zu Grundflächen auf der horizontalen Fläche dienen; E' der Punct in welchem die durch die Scheitel der vorgelegten Kegel gehende Linie die horizontale Ebne trift: so wird offenbar die schneidende Ebne in allen ihren Lagen immer durch diesen Punct gehen müssen.

Ich führe alsdann die Gerade E'F' nach Belieben, jedoch so, daß sie die beyden Grundflächen der Kegel trift, und betrachte diese Linie als den gemeinschaftlichen Durchschnitt der schneidenden und der horizontalen Ebne.

Ich construire ferner (§. 75.) die Projectionen der von den Puncten F' nach dem Scheitel des ersten Kegels, und vom Puncte f' nach dem Scheitel des zweiten Kegels geführten Linien; da diese Linien respectiv die Projectionen der in einerley Ebne liegenden erzeugenden Linien beyder vorgelegten Kegel sind, so werden ihre Durchschnite, welche auf jeder der coordinirten Ebnen durch die Ziffern 1, 2, 3, 4, angezeigt sind, Puncte des gemeinschaftlichen Durchschnitts seyn.

Betrachtet man die zweyte Figur, so wird man leicht wahrnehmen, daß der eine Kegel den andern durchdringt, und daß von den vier Puncten, welche

man durch die vorgehende Construction findet, zwey zum Eingange und zwey zum Ausgange des durchdringenden Kegels gehören.

§ 84. Erster Zusatz.

Wenn es darauf ankäme, den Durchschnitt eines Kegels und eines Cylinders zu finden, müßte man sich durch den Scheitel des Kegels eine Gerade der erzeugenden Linie des Cylinders parallel geführte Linie denken; alsdann würden alle durch diese Linie gehende Ebnen den vorgelegten Cylinder und Kegel nach geraden Linien schneiden und die Construction wäre dieselbe wie im vorhergehenden Fall.

§. 85. Zweyter Zusatz.

Wenn endlich der Durchschnitt zweyer Cylinder verlangt würde, müßte man sich dieselben durch Ebnen geschnitten denken, welche ihren erzeugenden Linien parallel sind, und man könnte auf eine ähnliche Art wie bey den Kegeln construiren, wenn diese Cylinder ihre Grundflächen in einerley Ebne hätten.

In der That würde man (§. 21 und 36) die Linie bestimmen, in welcher eine der erzeugenden Linie parallele Ebne die horizontale Ebne schneidet. *); und man würde alsdann dieser so viele

*) Um nach diesen Bedingungen eine Ebne zu bestimmen, braucht man sich bloß durch einen beliebigen Punct zwey

Linien als man will parallel führen. Die Puncte worin sie die Grundflächen der vorgelegten Cylinder schneiden, würden auf den in derselben Ebne genommenen erzeugenden Linien liegen, deren Projectionen man construiren würde (§. 76); ihr gegenseitiger Durchschnitt würde Puncte des gemeinschaftlichen Durchschnitts bestimmen.

§. 86. Anmerkung.

Wir können uns hier nicht ins Detail der Operationen einlassen, welche man für die verschiedenen besondern Fälle, die sich darbieten können, annehmen könnte. Dieser Gegenstand hat übrigens keine Schwierigkeit, und wenn man sich in der Art von Betrachtungen, die er mit sich führt, geübt hat, findet man von selbst die Vereinfachungen, deren die allgemeinen Methoden fähig ist.

Wir haben angenommen, daß die Grundflächen der vorgelegten Kegel oder Cylinder in einerley Ebne liegen; ob sich gleich dieses selten ereignet, so kann man es doch leicht erhalten, weil man nur nöthig hat die wie in §. 76. construirten erzeugenden Linien bis zur horizontalen Ebne zu verlängern.

Man könnte sich selbst dieser Vorbereitungsoperation entledigen, wenn man die schneidenden Ebnen wirklich nach den gegebenen Bedingungen führt,

---

Linien jeder der erzeugenden Linien respectiv parallel zu denken; diese werden (§ 36) die verlangee Ebne bestimmen.

und indem man ihren Durchschnitt mit den Curven bestimmt, welche dienen die Bewegung der erzeugenden Geraden anzugeben; allein dieses Verfahren ist weniger bequem, besonders wenn die Curven, von denen die Rede ist, nicht eben sind.

Hier ist ein besondrer Fall, welcher interessant seyn könnte, nehmlich der zweyer geraden Cylinder.

Wir wollen zur horizontalen Ebne eine Ebne nehmen, welche zugleich beyden Axen dieser Cylinder parallel ist, und zwey verticale Ebnen, welche respectiv auf jeder dieser Axen senkrecht sind.

Dieses vorausgesetzt, werden, wenn man sich diese Cylinder durch horizontale Ebnen geschnitten denkt, die Schnitte gerade den Axen parallele Linien seyn; da aber E''F'' Fig. 58. der Durchschnitt der verticalen Ebne DAB mit einer schneidenden Ebne ist, so werden F''F' und E''E' die auf der horizontalen Ebne projicirten Schnitte dieser Ebne und des ersten Cylinders seyn; man findet die ihnen correspondirenden im zweyten, wenn man in der auf der Axe des zweyten Cylinders senkrechten verticalen Ebne dab der ab die fe in einer Entfernung parallel führt, welche dem Abstande der E''F'' von AB gleich ist. Es ist klar daß fe der Durchschnitt der schneidenden Ebne mit der der Basis des zweyten Cylinders gleich seyn wird, und daß folglich ee' und ff' die verlangten Linien seyn werden, welche ihre correspondirende E''E', F''F' in der ersten in den Puncten 1, 2, 3, 4 schneiden, welche zur horizontalen Projection des gesuchten gemeinschaftlichen

Durchschnitts gehören. Was die verticale Projection betrift, so befindet sie sich auf dem Kreise, welcher zur Basis des ersten Cylinders dient.

Wenn man die Curve verlangte, welche der Durchschnitt irgend einer Ebne mit einer cylindrischen oder conischen Fläche wäre, so könnte man die vorhergehenden Methoden auf diesen Fall anwenden; denn eine Ebne gehört ebenfalls zur Familie der conischen oder zu der der cylindrischen Flächen, weil sie durch eine Gerade erzeugt werden kann, welche unterworfen ist sich längs einer andern zu bewegen und beständig durch einen außerhalb dieser Geraden genommenen Punct zu gehen, oder sich zu sich selbst parallel zu bewegen. Wir wollen uns nicht über diesen Gegenstand aufhalten, welcher überdies besondrer sehr leicht zu entdeckenden Vereinfachungen fähig ist, wenn man die coordinirten Ebnen auf eine angemessene Art wählt.

Wir wollen überhaupt anmerken, daß der Durchschnitt einer krummen Fläche und irgend einer Ebne sich immer leicht construiren läßt, weil, wie auch das System der schneidenden Ebnen beschaffen seyn mag, ihre Durchschnitte mit der vorgelegten Ebne immer gerade leicht zu bestimmende Linien seyn werden.

§. 87. Aufgabe.

Den Durchschnitt zweyer Umdrehungsflächen zu construiren, deren Axen in einerley Ebne liegen.

Dieser besondre Fall, der jedoch sehr ausge-

dehnt ist, verdient mit einiger Ausführlichkeit abgehandelt zu werden, weil er das Beyspiel von einem Verfahren darbiethet, welches man oft mit Nutzen anbringen kann.

Um die Durchschnitte der Flächen zu construiren, haben wir bisher schneidende Ebnen angebracht. Diese Wahl ist in der That die leichteste, die man treffen kann; es ist indessen leicht einzusehen, daß der Geist der Methode darin besteht, die beyden vorgelegten Flächen durch eine dritte zu schneiden. Da sich nun die hieraus erfolgenden Schnitte auf dieser letztern befinden, so müssen sie sich nothwendigerweise schneiden, wenn die erstern einen Punct ihres gemeinschaftlichen Durchschnitts in dieser Fläche haben.

Dieses vorausgesetzt, sieht man leicht ein, daß eine Kugel, deren Mittelpunct im Durchschnittspunct der Axen der vorgelegten Umdrehungsflächen liegt, wechselseitig so angesehen werden kann, als wäre sie durch die Umdrehuug eines ihrer größten Kreise um die erste Axe und um die zweyte erzeugt worden.

Zwey Umdrehungsflächen, welche einerley Axe haben, können einander nur in einem Kreise schneiden, dessen Ebne auf dieser Axe senkrecht ist, und deren Halbmesser der Abstand dieser Axe von dem Puncte ist, in welchem die in einerley Ebne genommenen erzeugenden Linien einander schneiden.

Zunächst diesen Betrachtungen ist nichts leichter als den Durchschnitt zweyer Umdrehungsflächen zu construiren, deren Axen in einerley Ebne liegen.

Es

Es seyen SE und *SF* Fig. 59 die Axen, **EX** und **FY** die erzeugenden Curven, vom Puncte **S** beschreibe man als aus einem Mittelpuncte mit einem nach Belieben genommenen Halbmesser einen Kreis MN, welcher zur Kugel gehört, deren Mittelpunct in S ist, und welche man als durch die Umdrehung dieses Kreises um die Axe SE erzeugt, denken kann; der Punct N bringt in dieser Bewegung einen Kreis hervor, welcher der gemeinschaftliche Durchschnitt der Kugel und der Fläche ist, welche zur erzeugenden Linie **EX** hat. Die Ebne dieses Kreises ist auf der der Figur senkrecht und geht durch **NH**. Wenn man so weiter schließt, so wird sich ergeben, daß die durch **FY** um *SF* beschriebene Fläche von der erwähnten Kugel nach einem Kreise geschnitten wird, welcher zum Halbmesser **GM** hat, und dessen Ebne auf der Ebne der Figur senkrecht ist; der Punct **P** wird also die horizontale Projection eines Punctes des gemeinschaftlichen Durchschnitts beyder vorgelegten Umdrehungsflächen seyn.

Dieses Verfahren wiederholt, giebt so viele Puncte dieser Projection als man will; was die verticale Projection betrift, so kann man sie durch die Höhen wie in der Aufgabe des §. 42 construiren, mit welcher diese in großer Beziehung steht. Man kann in der That zur Auflösung vermittelst zweyer Kegel gelangen, welche, indem sie einerley Scheitel haben, sich in ihrer ganzen Ausdehnung nach einer geraden Linie schneiden, welche auch die Umdrehungsflächen trift; und hierdurch kann man alles was im citirten

und im folgenden § gesagt worden auf die Aufgabe von der die Rede ist, anwenden.

§. 88. Anmerkung.

Um von den vorhergehenden Aufgaben einige Anwendungen zu geben, wollen wir einige Aufgaben vortragen, die sich mit Hülfe derselben auflösen lassen, und an denen man sich wohl zu üben hat.

1) Wenn man die Entfernungen eines Punctes von dreyen der Lage nach bekannten Linien kennt, die Projectionen dieses Punctes zu finden. Es ist klar, daß wenn man jede der gegebenen Linien zur Axe eines geraden Cylinders nimmt, dessen Halbmesser der Abstand dieser Linie vom gesuchten Puncte wäre, jeder der auf diese Art gebildeten Cylinder diesen Punct enthalten muß. Er kann also nur in ihrem Durchschnitte liegen.

Um aber den Durchschnitt der drey Cylinder zu finden, muß man zuvörderst die Projection der Curve suchen, nach welcher irgend zwey derselben sich schneiden, und alsdann die Durchschnitte dieser Curve und des dritten, oder, welches auf eins hinaus kommt, den Durchschnitt dieses letztern mit einem der schon gebrauchten bestimmen; man wird hierdurch zwey Curven erhalten, welche durch ihre Durchschnittspuncte diejenigen angeben werden, welche zugleich den drey vorgelegten Cylindern gemein sind.

Wenn diese beyden Curven durch ihre Projectionen gegeben sind, so werden die Puncte, worin diese

sich schneiden, die Projectionen der gesuchten Puncte seyn.

Es ist nun nöthig, das, was von den geraden Linien (§. 19) gesagt worden, auf den gegenwärtigen Fall anzuwenden.

Alle diese angezeigten Operationen können vermittelst der im Vorhergehenden begriffenen leicht vollzogen werden, und können bloß ihrer Lage wegen diejenigen Personen ermüden, welche mit dem Lineal und dem Zirkel umzugehen, wenig Fertigkeit haben. Uebrigens wollen wir für die mit der Analysis bekannten hier anmerken, daß die vorgelegte Aufgabe im Allgemeinen vom achten Grade mit dreyen unbekannten Größen ist; es ist daher nicht zu verwundern, daß das Verfahren verwickelt wird.

Es biethet sich ein sehr einfacher Fall dar, den unsre Leser zuvörderst construiren könnten; es ist nehmlich der, wo die drey gegebenen Geraden einer und derselben Ebne, die man dann zur horizontalen Ebne wählt, parallel sind, und die Construction ist dieselbe, welche wir oben (§. 85) gegeben haben.

2) Wir wollen annehmen, daß ein in der Luft befindlicher Gegenstand D Fig. 60, zum Beyspiel ein Ballon, zugleich aus dreyen gegebenen Standpuncten E′G′F′, gesehen werden kann, und daß man in jedem derselben den Winkel beobachtet, welchen die nach dem Puncte D gezogene Gesichtslinie mit der verticalen Ebne bildet; so kann man die Höhe dieses Punctes und seine Projection auf der horizontalen Ebne auf folgende Art finden:

Man wähle zur horizontalen Ebne die Ebne P′Q′ welche durch einen der gegebenen Puncte F′ geht; und da die Lage der Puncte G und E bekannt ist, so hat man ihre Projectionen G′ und E′ auf dieser Ebne.

Dieses vorausgesetzt, wollen wir uns vorstellen, daß sich eine der Gesichtslinien DE zum Beyspiel, um die ihr correspondirende verticale E′M dergestalt herum bewegt, daß sie mit derselben immer einerley Winkel bildet; so wird sie einen geraden Kegel erzeugen, auf dessen Oberfläche der Punct D nothwendigerweise liegen muß. Wendet man eben diese Schlüsse auf die beyden andern Puncte F′ und G an, so wird man drey Kegel haben, welche den gesuchten Punct enthalten; er muß also in ihrem Durchschnitte liegen.

Man suche daher hier, wie im vorhergehenden Exempel, die Projectionen der Durchschnitte eines dieser Kegel mit jedem der beyden andern; und wir haben zu dieser Bestimmung ausführbare Methoden gegeben. Da aber die vorgelegten Kegel ihre Axen auf einer und derselben Ebne senkrecht haben, und da sie gerade sind, so wird es bequem seyn, die schneidenden Ebnen dieser parallel zu nehmen; hieraus werden für die Schnitte eines jeden Kegels Kreise erfolgen, deren Halbmesser die senkrechte seyn wird, welche von dem Puncte der Axe ausgeht, durch welchen die schneidende Ebne trift, und sich im Durchschnitt der Seite endigt; und die auf diese Art gefundenen Kreise werden ihrer Projection auf

der horizontalen Ebne gleich seyn. Diese Auseinandersetzungen sind hinreichend, um die Construction zu beendigen.

Es ist leicht einzusehen, daß dieses letztere Verfahren auch von den Umdrehungsflächen gilt, deren Axen auf einer und derselben Ebne senkrecht sind.

3) Wir wollen zur letztern Aufgabe annehmen, daß ein in einem Luftballon sich befindender Beobachter seine Lage dadurch bestimmen wollte, indem er die Winkel mißt, welche die nach dreyen Puncten, deren gegenseitige Lage bekannt ist, gezogenen Gesichtslinien mit einander einschließen.

In diesem Falle kennt man Fig. 60 die Winkel EDF′, GDF′ und GDE, so wie die gegenseitige Lage der drey Puncte G, F′ und E. Wir wollen setzen, daß man die durch die drey gegebenen Puncte bestimmte Ebne zur horizontalen Ebne genommen habe; man hat alsdann die Basis und die Winkel der Gränzen einer Pyramide, und man verlangt die Projection des Scheitels auf ihrer Basis und deren Höhe.

Es sey GEF Fig. 61. das Dreyeck der Basis; wir wollen uns nun vorstellen, daß man auf EF einen Kreisabschnitt EKF beschrieben habe, welcher den gegebenen Winkel EDF′ faßt; dieses Segment wird, indem es sich um EF dreht, einen Körper erzeugen, welcher alle diejenige Puncte des Raums enthält, von deren jedem zwey nach den Puncten E und F gezogene gerade Linien immer einen dem gegebenen gleichen Winkel einschließen; der Punct D wird also auf dieser Fläche liegen. Diese Schlüsse bey jeder der Seiten GE und GF angebracht, werden zwey

andre auf dieselbe Art erzeugte Umdrehungsflächen geben, welche ebenfalls den gesuchten Punct enthalten. Diese Flächen werden ihre Axen in einerley Ebne haben, und man kann die Durchschnitte nach dem Verfahren des §. 87 bestimmen. Die Durchschnittspuncte der horizontalen Projectionen dieser Durchschnitte werden den Punct H bestimmen, welcher die Projection des Scheitels der Pyramide auf der Ebne der Basis seyn wird, und die Höhe würde durch dieselbe Operation gegeben seyn.

Anmerkung.

Diese Aufgabe in Analysis gesetzt, bietet interessante Resultate dar, und die von Lagrange in den Memoiren der Berliner Academie vom Jahre 1775 gegebenen Formeln führen zur Gleichung auf eine sehr einfache Art. Die geometrischen Betrachtungen, welche zur Auflösung gedient haben, führen, in die algebraische Sprache übersetzt, zu den von diesem berühmten Geometer gefundenen Ausdrücken.

Diese Aufgabe ist im allgemeinen vom vierten Grade; man kann indessen in der Construction die Anzahl der Auflösungen auf vier reduciren; denn die Körper, welche man braucht, in ihrer ganzen Ausdehnung betrachtet, werden durch die Umdrehung seines ganzen Kreises um seine Sehne erzeugt; allein der durch das eine Segment erzeugte gehört zu Puncten, deren Gesichtslinien Winkel einschließen, welche die Supplemente von denen sind, welche der durch das andre Segment erzeugte Theil giebt.

So hat man in der Construction nur das Segment EKF gebraucht; denn das andre Segment EkF gehört zu einem Winkel, welcher das Supplement des Winkels F′DE (Fig. 60 ist) *).

Fortsetzung von der Entstehung der krummen Flächen.

§. 89.

Wir haben im Vorhergehenden von der Entstehung und den Durchschnitten der Flächen gehandelt, deren Construction von einer einzigen Curve abhängt; wir wollen nun zu denen übergehen, welche die Hülfe mehrerer erfordern. Wir wollen mit den aus geraden Linien zusammengesetzten Flächen den Anfang machen.

Um die Bewegung einer Geraden zu bestimmen sind drey Bedingungen erforderlich; denn wenn die gerade erzeugende Linie unterworfen ist beständig durch einen und denselben gegebenen Punct zu gehen, wie beym Falle des Kegels, oder sich zu sich selbst parallel zu bewegen, wie bey der Entstehung des Cylinders, so kommt dieses auf zwey Bedingungen zurück. In der That ist ein Punct durch seine beyde Projectionen gegeben, dasselbe ist auch bey einer Linie der Fall; die Coexistenz dieser gege-

---

*) Nur durch die Auflösung dieser Aufgabe, die ich einem Schüler von Monge verdanke, bin ich zur Kenntniß der im §. 87 gegebenen Methode gelangt.

benen Stücke bietet also zwey Bedingungen dar. Die Curve, nach welcher sich die erzeugende Linie bewegt, ist die dritte.

Um einige Beyspiele von einer Fläche zu geben, welche durch die Bewegung einer geraden Linie erzeugt wird, welche unterworfen ist durch zwey gegebene Linien zu gehen, wollen wir zuvörderst annehmen, daß die erste dieser beyden eine verticale Gerade, und daß die andre irgend eine durch ihre Projectionen gegebene Curve sey. Die Bewegung der erzeugenden Linie wird noch immer nicht gänzlich bestimmt seyn; denn es seyen XM und EE′, Fig. 62. die Curve und die gegebene Linie; während daß die erzeugende Linie EM an einem ihrer Puncte auf der Curve XM fest bleibt, kann sie sich um diesen Punct bewegen, und so alle Puncte der Linie EE′ durchlaufen. Man muß also eine neue Bedingung hinzufügen, und unter allen denen, die man wählen kann, wollen wir annehmen, daß die Linie EM beständig horizontal bleibe, das heißt, daß der Punct M und der Punct E immer in einerley Höhe liegen.

Die Construction dieser Fläche ist nichts als leicht; denn man braucht nur durch die gegebene Linie EE′ und durch einen auf der horizontalen Ebne BAC beliebig genommenen Punct P′ eine verticale Ebne zu legen, welche die gegebene Curve in M schneidet; die Ordinate MM′ wird die Höhe des Punctes L über seiner horizontalen Projection seyn.

§. 90.

Wir wollen noch ein andres Beyspiel von analogen Flächen geben. Wir wollen uns vorstellen, daß zwey Curven XM, xm Fig. 63. immerwährend durch eine Ebne geschnitten werden, welche unterworfen ist beständig durch eine verticale Linie AD zu gehen. Verbindet man nun die beyden Puncte, in denen diese Ebne in jeder ihrer Lagen die vorgelegten Curven XM und xm schneidet, durch eine unbegränzte Gerade Mm, so wird das Ganze der auf diese Art bestimmten Geraden eine krumme nach dem Vorhergehenden leicht zu bestimmende Oberfläche bilden.

Wir wollen uns nicht dabey aufhalten, die Operation aus einander zu setzen; wir wollen nur noch anmerken, daß der einfachste Fall derjenige ist, wo die beyden krummen Linien XM und xm durch gerade Linien ersetzt sind, und alsdann ist die vorgelegte Fläche die, welche durch die Bewegung einer Geraden erzeugt wird, die unterworfen ist sich längs dreyer andern zu bewegen. Man sieht hieraus, wie leicht diese Fläche zu construiren ist, wenn man die coordinirten Ebnen dergestalt wählt, daß eine derselben auf einer der gegebenen Geraden senkrecht ist.

Ueberhaupt wird die Bewegung einer geraden Linie bestimmt seyn, so oft diese Linie unterworfen ist, sich längs dreyer gegebenen Curven zu bewegen. Die Flächen, von denen wir bisher geredet haben, sind nur besondre Fälle von denen, welche durch diese Bewegung entstehen; alle diese sind unter dem

Nahmen der Afterflächen begriffen. Die **kegelförmige Ecke des Wallis ist eine dieser Flächen.** *)

§. 91.

Die beyden letzten Familien der Flächen, welche wir betrachtet haben, sind, obgleich aus geraden Linien zusammengesetzt, dennoch vom Kegel und dem Cylinder wesentlich unterschieden. In der That können diese aus einander gelegt, das heißt in einer einzigen Ebne ausgedehnt werden, ohne daß sie zerreiße; denn man kann sich den Kegel als aus unendlich langen und unendlich nahe an einander liegenden Ebnen zusammengesetzt denken; und denkt man sich jede dieser Ebnen um ihren Durchschnitt mit der nächstfolgenden wie um ein Gewinde drehend, so wird sie sich an dieselbe anschließen.

*) Dieses ist ihre Entstehung: BDE. Fig. 64. sey ein in einer der Linie AC parallelen verticalen Ebne gelegener Quadrant; denkt man sich nun eine zweyte auf dieser Linie senkrechte verticale Ebne, welche sich zu sich selbst parallel bewegt, und man verbindet die zwey Puncte, in welchen sie in jeder ihrer Lagen die gerade AC und den Bogen DE′ schneidet, durch Gerade G′F, so wird das Ganze dieser Geraden die Fläche seyn, worauf es hier ankommt.

Man sieht, daß der von dieser Fläche und den Ebnen DAB, BAC eingeschlossene Körper, rechtwinklichte Dreyecke wie FG′F′ giebt, wenn man sie durch Ebnen schneidet welche auf AC senkrecht sind. Er ist übrigens nur der achte Theil von dem, welchen die eben beschriebene Fläche faßt, wenn sie ergänzt wird; denn es ist klar,

Man kann sich diese Wahrheit sinnlich machen, wenn man in Gedanken statt des Kegels eine Pyramide von einer sehr großen Anzahl Seiten setzt, und man wird sich leicht überzeugen, daß der Satz immer statt haben wird, so sehr man auch die Anzahl der Seiten vermehren mag; er wird daher auch vom Kegel richtig seyn, welcher alle diese Pyramiden umschließt. Eine ähnliche Schlußfolge läßt sich auch beym Cylinder anbringen, wenn man statt der Pyramiden Prismen substituirt. Allein die Flächen von denen wir §. 89. gehandelt haben, sind nicht mit dieser Eigenschaft behaftet; denn alle sie zusammensetzende Geraden müssen sich in ihrer Richtung durchkreuzen, indem die eine unterhalb der andern in der Linie EE' Fig. 62. durchgeht, ohne sich zu begegnen. Damit daher eine Fläche zerlegbar sey, müssen nach dem Vorhergehenden von den sie bildenden Geraden wenigstens je zwey und zwey einander schneiden. Dasselbe gilt auch von der Art der im §. 90. betrachteten Flächen in allen Fällen, außer in den, wo sie sich nach der Natur und Lage der Curven XM und xm auf eine Ebne oder auf einen Kegel reducirt.

---

daß man den ganzen Kreis statt des Quadranten DBE' nehmen und die erzeugende FC, unterhalb der Ebne BX über AG hinaus verlängern muß.

§. 92.

Die Idee der Zerlegung ist durch die Betrachtung der von Ebnen begränzten Körper hervorgebracht worden. Alle Oberflächen der Körper dieser Art können zerlegt werden; es herrschen indessen in dieser Rücksicht Verschiedenheiten, die wir näher erörtern wollen.

Betrachtet man eine Pyramide, indem man von ihrer Basis abstrahirt, so wird man leicht einsehen, daß die Zerlegung in der Ebne einer ihrer Seitenflächen geschehen kann, und daß durch dieses Mittel die andern neben dieser zu liegen kommen werden, ohne daß zwischen ihnen irgend ein leerer Raum, irgend eine Aufhebung der Stetigkeit anzutreffen ist. Dasselbe gilt auch von Prismen, wenn man von ihren Grundflächen abstrahirt; und dieses muß man immer thun; denn die Grundflächen eines Prisma oder die einer Pyramide sind nichts anders als Gränzen, welche die Imagination oder das Bedürfniß unbegränzten Körpern setzen.

Wendet man diese Betrachtungen auf einen andern z. B. auf einen zwanzigeckigten oder auf einen zwölfeckigten Körper an, so wird man leicht einsehen, daß dieses bey ihnen nicht der Fall ist, und daß zwischen den verschiedenen Theilen ihrer Zerlegung leere Räume anzutreffen sind.

Allein die Prismen und die Pyramiden sind nicht die einzigen, deren Oberfläche sich ohne Auflösung der Continuität zerlegen lassen: sondern der Begriff der Zerlegung zeigt, daß sie statt haben muß, so

oft die vorgelegte Fläche aus unbegränzten Winkelflächen zusammengesetzt ist, welche mit einander durch ebenfalls unbegränzte Seiten verbunden sind, wenn auch diese Winkel nicht ihre Scheitel in einem und demselben Puncte haben.

Man kann sich leicht die Figur des Körpers vorstellen, dessen Seiten die Winkelflächen MRM_1, $M_1R_1M_2$, $M_2R_2M_3$ Fig. 65 angeben, von denen je zwey und zwey durch eine ihrer Seiten verbunden, und welche auf eine beliebige Art gegen einander geneigt sind. Er wird eine Pyramide, wenn alle Scheitel der Winkel R, R_1, R_2 ꝛc. auf einander fallen, und ein Prisma, wenn sie sich unendlich weit entfernen; denn alsdann sind die Gränzen M_1R_1, M_2R_2 ꝛc. einander parallel.

§. 93.

Wir wollen uns nun eine Ebne denken, welche unterworfen ist sich nach einem gewissen Gesetze zu bewegen, zum Beyspiel nach dem, auf einer gegebenen Curve von gedoppelter Krümmung XZ Fig. 65 beständig senkrecht zu seyn. Es sey PMN eine der Lagen dieser Ebne, $P_1M_1N_1$ eine zweyte auf die erste nächst folgende Lage, welche diese nach der Linie M_1N_1 schneidet; es sey ferner $P_2M_2N_2$ eine dritte auf die beyden andern folgende Lage, welche die letztere nach M_2N_2 schneidet; endlich sey $P_3M_3N_3$ eine vierte Lage der Ebne, in welcher sie die dritte nach M_3N_3 schneidet. Man sieht, daß auf diese Art ein Körper gebildet wird, dessen Seitenflächen

Ebnen und von geraden Linien MN, M_1N_1, M_2N_2, M_3M_3 ꝛc. begränzt sind, von denen je zwey und zwey in einerley Ebne liegen, und welche folglich einander schneiden. Es ist klar, daß sich dieser Körper zerlegen läßt, wenn man jede seiner Seitenflächen um ihren Durchschnitt mit der nächst vorhergehenden Fläche so lange herum drehen läßt, bis sie in ihre Ebne zu liegen kommt.

Dieses ist die allgemeinste Art, nach welcher man sich eine zerlegbare Fläche vorstellen muß; denn ob wir gleich einen von einer endlichen Anzahl Ebnen begränzten Körper betrachtet haben, so kann man sich doch die Anzahl derselben so viel als man will vervielfacht denken, ohne daß die vorgetragene Eigenschaft aufhört statt zu haben; und es verhält sich mit diesem Uebergange so wie mit dem des Umfanges der Polygone zum Umkreise des Zirkels. Die unbegränzte Vervielfachung der Körper, welche wir betrachtet haben, wird auf eine krumme Oberfläche führen, welcher alle Resultate zukommen, die wir eben gefunden haben.

Der Kegel und der Cylinder lassen sich daraus als besondre Fälle herleiten, wie wir gleich zeigen werden. In der That folgt aus der Entstehung irgend einer zerlegenden Fläche, daß die Geraden MN, M_1N_1, M_2N_2, M_3N_3, ꝛc. sie ihrer ganzen Länge nach berühren, und sich je zwey und zwey in den Puncten R, R_1 ꝛc. schneiden. Die Reihe dieser Puncte gehört zu einer Curve, welche wir **die Wiederkehrungsgränzen der vorgelegten Fläche** nennen wol-

len, weil diese Fläche sich nicht in dem durch die Concavität dieser Curve bestimmten Raum ausdehnt, sondern zwey Abschniite bildet, welche von jeder Seite dieser Gränze fortgehen. Wenn alle Puncte R, R_1, R_2 ꝛc. in einem einzigen zusammen liefen, so würde die vorgelegte Fläche die des Kegels werden; sie würde ein Cylinder seyn, wenn alle Durchschnitts-puncte unendlich weit entfernt lägen, und die Linien $M_1 N_1$ ꝛc. einander parallel wären. In diesem Falle ist die Curve XZ, auf welcher die erzeugende Ebne in allen ihren Lagen senkrecht ist, eine ebne Curve. Denn da die erzeugende Ebne in jeder ihrer Lagen sich auf einer und derselben Ebne senkrecht befindet, so wird die der gegebenen Curve so wie ihre auf einander folgende Durchschnitte ebenfalls auf dieser senkrecht, und folglich einander parallel seyn.

Die Curve RR_1R_2 ꝛc. könnte zur Erzeugung der vorgelegten Fläche dienen; denn diese erfolgt aus der Verbindung aller Tangenten dieser Curve, und es giebt keine zerlegbare Fläche, die man sich nicht auf diese Art hervorgebracht denken könnte.

Wenn die Curve RR^1R^2 ꝛc. eben wäre, so würde die durch alle Tangenten erzeugte Fläche nichts anders als die Ebne seyn, in welcher diese Curve liegt*).

---

*) Monge, welcher im IXten und Xten Bande der Memoires des Savans Etrangers diesen Gegenstand sehr vollständig analytisch abgehandelt hat, diese Curve Wiederkehrungs-gränze der zerlegbaren Fläche genannt. Wir verweisen auf diese Schriften diejenigen unsrer Leser, welche in diesen Gegenstand mehr eindringen wollen.

§. 94.

Wir wollen diese Aufzählung einiger krummen Oberflächen mit derjenigen endigen, welche nur eine Verallgemeinerung der in den Künsten unter dem Namen des **Ringes** oder der **ringförmigen Fläche** bekannten Fläche ist.

Wir wollen uns vorstellen, daß eine Ebne PQ Fig. 66. unterworfen sey einen bestimmten Punct M immer auf der im Raume gegebenen Curve XZ zu haben, und sich auf dieser Curve senkrecht, oder, wenn man will, einer andern der Lage nach gegebenen Ebne parallel zu bewegen. Eine auf dieser Ebne gezogene Curve GH wird in der angenommenen Bewegung eine krumme Fläche beschreiben, welche die Figur eines Ringes haben wird, wenn die Curve GH ein Kreis ist. Der schattirte Theil der Figur giebt das Bild eines Theils dieser Fläche.

Der einfachste Fall ist der, wo die gänzlich in der horizontalen Ebne liegende Curve XZ Fig. 67. ein Kreis, und die Curve GH ein andrer in der verticalen Ebne DAH liegender Kreis ist, welcher seinen Mittelpunct O' beständig auf dem Umkreise X'Z' hat, der aus dem Puncte A, als aus einem Mittelpuncte beschrieben, angenommen wird. Dieses ist der ordinäre Ring.

Man sieht, daß diese Fläche zugleich zu den durch die Umdrehung entstehenden Flächen gehört; denn sie wird durch einen Kreis hervorgebracht, welcher sich um seine Axe AD drehet, die zwar außerhalb desselben, aber doch in seiner Ebne genommen ist.

Es

Es wäre nun hier der Ort, von den gegenseitigen Durchschnitten der verschiedenen Arten der krummen Oberflächen zu handeln, welche wir eben betrachtet haben; allein die Gränzen, die wir uns gesetzt, gestatten es nicht *).

Wir wollen mit einigen Prinzipien über die Art schließen diejenigen Flächen zu zerlegen, welche einer dergleichen Operation fähig sind, und über die den Curven im Allgemeinen Tangenten zu führen.

Von der Zerlegung der Oberflächen.

§. 95.

Wenn man eine Fläche zerlegt, so beabsichtigt man, die in dieser Fläche betrachteten Curven auf eine einzige Ebne zurück zu bringen; so zum Beyspiel zerlegt man den Cylinder, um darin bequemer eine Schraubenlinie ziehen zu können. Man sieht leicht ein, daß man um diese Zerlegung zu vollführen, die auf der sie enthaltenden Fläche gegebenen Curven auf gegebene Stücke übertragen muß, welche beym Uebergange der Fläche in eine Ebne keine Veränderung der Größe erleiden, und deren gegenseitige Lage in diesem letztern Falle leicht zu bestimmen sey.

*) Ich habe im fünften Capitel des ersten Bandes meines Lehrbegriffs der Differential- und Integralrechnung die analytische und vollständige Theorie der krummen Flächen gegeben.

§. 96. Aufgabe.

Einen Cylinder zu zerlegen.

Schneidet man den Cylinder durch eine auf seiner erzeugenden Linie senkrechte Ebne, so wird offenbar, da letztere in jeder ihrer Lagen sich selbst parallel bleibt, der vorgelegte Cylinder nur aus geraden auf dieser Ebne senkrechten Linien gebildet seyn. Dieses vorausgesetzt, werden, wenn man sich Fig. 68 denkt, daß alle diese Linien F_1E_1, F_2E_2, ꝛc. sich um FE drehen, um sich an der Zerlegung anzuschließen, die Bogen FF_1, F_1F_2 ꝛc. gerade Linien seyn, und alle in einer und derselben Verlängerung fallen; denn sie sind alle auf der Axe um welche die Umdrehungsbewegung geschieht, senkrecht. Das Resultat wird also eine gerade Linie seyn, auf welcher alle erzeugende Linien des Cylinders senkrecht seyn werden.

Es sey nun auf dem Cylinder eine Curve MM_1M_2 ꝛc. nach irgend einem Gesetze gezogen oder durch den Durchschnitt dieses Körpers mit einem andern, dessen Entstehung bekannt ist, hervorgebracht. Da der Cylinder so wie die Lage aller Puncte dieser Curve gegen die coordinirten Ebnen gegeben ist, so ist es leicht, auf letztern die Projectionen des eben angezeigten senkrechten Schnitts zu construiren, und denkt man sich denselben in so viele Theile FF_1, F_1F_2 ꝛc. als man will getheilt, so wird man leicht die Entfernungen MF, M_1F_1, M_2F_2 ꝛc. der Puncte der vorgelegten Curve von denjenigen Puncten dieses Durchschnitts bestimmen können, welche sich auf einer und derselben erzeugenden Linie befinden. Diese

Entfernungen werden alsdann in der Zerlegung keine Aendrungen leiden, und man kann sie auf der Geraden, welche den senkrechten Durchschnitt vorstellt, aus den mit den Puncten F, F_1, F_2 correspondirenden Puncten f, f_1, f_2 rc. auftragen; die Curve mm_1m_2 rc. ist alsdann das, was die vorgelegte Curve wird, wenn man den Cylinder zerlegt.

Es ist wohl zu merken, daß, obgleich die Curve MM_1M_2 geschlossen werden kann, doch ihre Zerlegung in vielen Fällen unbestimmt ist; dieses rührt davon her, weil man sich vorstellen muß, daß eine Ebne, indem sie sich in einen Cylinder rollt, auf sich selbst so oft man will herumgelegt werden kann, weil sie ihrer Natur nach unbegränzt ist. So findet man, wenn man die Zerlegung einer Ellipse construirt, welche der Durchschnitt eines Cylinders mit einer zu seiner Basis geneigten Ebne ist, zum Resultat eine unbegränzte Curve.

§. 97. Zusatz.

Wenn der vorgelegte Cylinder gerade wäre, so würde seine Basis selbst durch einen auf seiner erzeugenden Linie senkrechten Schnitt entstehen, und denkt man sich dieselbe in einer geraden Linie ausgedehnt, so kann man alles darauf anwenden was im Vorhergehenden in Rücksicht auf diesen Schnitt gesagt worden.

Da man den Umkreis des Zirkels nur durch Annäherung erhalten kann, so folgt, daß man die Zerlegung des geraden Cylinders nur annäherungs-

weise construiren kann; und diese Unvollkommenheit tritt bey Cylindern ein, deren senkrechter Schnitt keine rectifizirbare Curve ist; allein in den Künsten begnügt man sich, diese Curve in eine so große Anzahl Theile zu theilen, daß sie als geradlinigt angesehen werden können, und in diesem Falle zerlegt man eigentlich nicht den vorgelegten Cylinder, sondern ein in diesem Cylinder eingeschriebenes Prisma von einer sehr großen Anzahl Seiten.

§. 98. Anmerkung.

Es giebt eine besondre Curve Fig. 69, die man auf dem Cylinder ziehen kann, die nicht mit Stillschweigen übergangen werden darf. Es ist die, welche mit der Eigenschaft behaftet ist, mit der erzeugenden Geraden beständig einerley Winkel zu bilden, in welcher Lage sie sich auch befinden mag.

Es ist leicht einzusehen, daß diese Curve eine gerade Linie wird, wenn man den Cylinder zerlegt; denn da sich alsdann alle Lagen der erzeugenden Linie in einer und derselben Ebne parallel befinden, so können sie nur durch eine Gerade unter einem beständigen Winkel geschnitten werden.

Wenn der Cylinder gerade ist, das heißt, wenn er zur Basis einen Kreis, und die erzeugende Linie auf dieser Basis senkrecht hat, so ist alsdann die Curve, von der wir reden, diejenige, welche der Zug eines Schraubenganges bildet.

Denkt man sich eine Gerade, welche folgenden drey Bedingungen unterworfen ist: 1) beständig zur

Ebne der Basis des Cylinders parallel zu seyn; 2) beständig durch seine Axe zu gehen; 3) dem Laufe der vorgelegten Curve zu folgen; so wird diese Gerade eine Fläche erzeugen, von welcher der Zug einer Treppe das Bild vorstellt, und welche man unterhalb der Wendeltreppen gänzlich sehen kann.

Diese Fläche ist von der Gattung derjenigen, von denen im §. 89 eine Definition gegeben worden; und es ist leicht sie zu construiren oder ihre Durchschnitte mit einer Ebne oder andern Fläche zu finden, deren Entstehung bekannt ist.

Wenn man statt einer geraden Linie einen Kreis dergestalt bewegen ließe, daß er immer in einer durch die Axe des geraden Cylinders gehenden Ebne wäre, und daß sein Mittelpunct die in diesem Abschnitte betrachtete Curve durchliefe, so wird die hieraus entstehende Fläche bey den Wendeltreppen mit gewölbten Bogen angebracht, welche den Namen vis Saint-Gilles führen.

Man nennt eine **Schraubenlinie**, die Curven, welche durch dies Umwinden einer geraden Linie um eine cylindrische Fläche gebildet wird. Diese Curven haben die Eigenschaft, daß sie die kürzesten Linien sind, welche man auf dieser Fläche zwischen zweyen ihrer Puncte führen kann; und man kann sich leicht davon überzeugen, wenn man in Erwägung zieht, daß die Ausdehnung der Fläche eines Cylinders keine Veränderungen erleidet, wenn man sie zerlegt; folglich können die gegenseitigen Entfernungen der sie zusammensetzenden Puncte weder Aus-

dehnung nach Zusammenziehung erleiden; alsdann aber ist der kürzeste Abstand irgend zweyer dieser Puncte die von einem zum andern geführte gerade Linie, und diese Gerade wird auf dem Cylinder eine umgewundene.

Das eben Gesagte kommt nicht allein den Cylindern, sondern auch den Kegeln uud den zerlegbaren Flächen überhaupt zu.

Wenn man auf ihrer Zerlegung eine gerade Linie zieht, und man bringt diese Flächen in ihren vorigen Zustand zurück, so wird die vorgelegte Linie eine Curve werden, welche mit ähnlichen Eigenschaften als die der umgewundenen behaftet ist.

Diese Curve wird nichts anders seyn, als die welche gebildet wird, wenn man einen Faden um eine zerlegbare Fläche frey herumwindet *).

---

*) Um sich eine richtige Idee von dieser Curve zu machen, braucht man bloß anzunehmen, daß der Faden eine gewisse Breite habe, wie die eines Bandes; alsdann wird man sehen, daß es eine Art giebt, es um die vorgelegte Fläche zu winden ohne es zu falten; und iede der Gränzen dieses Bandes wird genau die Curve bilden, welche wir vor Augen haben.

Wir wollen hier noch anmerken, daß man eben so einen Faden um irgend eine krumme Fläche frey herumwinden kann, wenn man ihn zwischen seinen äußersten Gränzen so viel als möglich anspannt; die durch dessen Anlegen auf die vorgelegte Fläche bestimmte Curve, ist die kürzeste, welche man zwischen zwey ihrer Puncte ziehen kann.

§. 99. Aufgabe.

Die Zerlegung irgend einer Kegelfläche zu construiren.

Die Idee, welche man sich von der Zerlegung einer Pyramide macht, wenn man von ihrer Basis abstrahirt, führt natürlich auf die der Zerlegung des Kegels.

Wenn man sich nun auf der Fläche dieses Körpers eine Curve dergestalt gezogen denkt, daß alle ihre Puncte vom Scheitel des Kegels gleiche Entfernung haben, wenn man den Kegel zerlegt, so wird die Curve, von der eben die Rede ist, ein Kreis, oder wenigstens ein Theil eines Kreises seyn, dessen Halbmesser der beständige Abstand eines jeden der Puncte dieser Curve vom Scheitel des Kegels ist.

Man sieht leicht ein, daß wenn man sich eine Kugel vorstellt, welche den Scheitel des Kegels zum Mittelpuncte hat, sie die Oberfläche des Kegels nach einer Curve von der Gattung schneiden wird, von welcher eben geredet worden, und welche folglich leicht zu construiren ist.

Es sey FF_1F_2 Fig. 70 diese Curve, und MM_1M_2, ꝛc. irgend eine auf der vorgelegten conischen Fläche gezogene Curve, welche nun zerlegt werden soll. Man wird hierzu gelangen, wenn man die Entfernungen MS, M_1S, M_2S, ꝛc. des Scheitels von jedem ihrer Puncte bestimmt, und ferner die Breite der Bogen FF_1, FF_2 ꝛc., welche auf der ersten Curve zwischen einer nach Belieben genommenen von diesen Entfernungen, wie zum Beyspiel MS, und jedem der andern liegt.

Nachdem man nun auf einer Ebne eine Linie sf gezogen hat, um die Lage der erzeugenden Linie des Kegels beym Anfange der Zerlegung darzustellen, beschreibe man aus dem Puncte s als aus einem Mittelpuncte mit einem der SF gleichen Halbmesser sf einen Kreis; alsdann bestimme man die Anzahl Grade die ein Bogen des Kreises ff_1f_2 haben muß, dessen Breite der des Bogens FF_1 gleich ist, und nachdem man den Winkel fsf_1 von dieser Anzahl Grade verzeichnet hat, nehme man auf sf eine Entfernung $sm_1 = SM_1$; der auf diese Art gefundene Punct m_1 wird zur Zerlegung gehören, die man construiren will.

§. 100. Anmerkung.

Diese Auflösung erfordert, wie man sieht, daß man die Länge der verschiedenen Theile der Curve kenne, welche alle ihre Puncte in gleicher Entfernung vom Scheitel des Kegels hat, oder daß man wenigstens diese Theile in Kreisbogen verwandeln könne. Dieses kann aber nur durch Hülfe der Integralrechnung, und auch dann zuweilen nur durch Annäherung erhalten werden; so daß das Verfahren, welches ich eben angezeigt habe, nur mit Hülfe der Analysis angewendet werden kann. Da man sich indessen in den Künsten nur vorsetzt eine Genauigkeit zu erhalten, welche zu den Mitteln der vorgesetzten Ausführungen hinreichend ist, so modificirt man die vorhergehende Methode dergestalt, daß sie ausgeführt werden kann.

Man zerlegt alsdann statt des Kegels eine darin eingeschriebene Pyramide, welche man von einer sehr großen Anzahl Seiten annimmt, so daß die Bogen FF_1, F_1F_2, F_2F_3 ꝛc. als von geraden Linien nicht merklich unterschieden angesehen werden können, und man trage sie successiv in ff_1, f_1f_2, f_2f_3 ꝛc. auf den Umkreis des in der Zerlegung gezogenen Zirkels. Das Uebrige der Construction endigt sich, wie im Vorhergehenden gesagt worden.

§. 101. Zusatz.

Nimmt man an, daß der Kegel, dessen Zerlegung gesucht wird, gerade sey, das heißt von einer kreisförmigen Basis, und daß seine Axe durch den Mittelpunct dieser Basis gehe, so wird alsdann die Curve FF_1F_2 ꝛc. ein der Basis des Kegels paralleler Kreis, und da der Halbmesser SF nach Belieben genommen ist, so ist es bequemer, die Basis selbst anzubringen. Man sieht aber, daß in der Zerlegung diese Basis noch einen Theil eines Kreises ausmacht, dessen Halbmesser aber nicht mit dem auf dem Kegel einerley ist. Dieser ist Fig. 71. OE, indeß der andre ES die Seite des Kegels selbst ist.

Wenn die Linien OE und ES einander commensurable sind, so ist es leicht die Zerlegung zu erhalten; denn da die Länge des Umkreises der Basis des Kegels und die des ganzen Bogens der Zerlegung im Verhältnisse dieser Linien stehen, so wird auch dasselbe bey jedem ihrer correspondirenden Theile der Fall seyn. Die Construction würde vollkommen

strenge seyn, wenn dieses Verhältniß von der Art ist, daß der Bogen ge geometrisch construirt werden könnte; denn alsdann ist die Aufgabe darauf zurückgebracht auf den Bogen GE und ge Theile zu nehmen, welche zu einander dasselbe Verhältniß haben, welches man durch die einfache Operation der Halbirung der Winkel verrichten kann.

§. 102. Anmerkung.

Wir wollen uns in kein Detail in Betreff der zerlegbaren Flächen im Allgemeinen einlassen. Die zu ihrer Zerlegung anzubringende strenge Methode kann hier leicht gezeigt werden, und was die Annäherungsmethoden betrifft, so sind sie an und für sich zu lang und von einem zu geringen Gebrauch, als daß wir dabey verweilen sollten. Wir wollen uns begnügen anzumerken, daß man statt der Zerlegung einer Fläche die eines in dieser Fläche eingeschriebenen Polyedrums suchen muß, welches nach demselben Gesetze gebildet ist.

Man bestimme also Fig. 65. die Winkel MBM_1, $M_1R_1M_2$, $M_2R_2M_3$ ꝛc. und die Längen der Linien MR, M_2R_2 und RR_1, R_1R_2 ꝛc. und mit Hülfe dieser gegebenen würde man in einer Ebne die Dreyecke MRM_1, $M_1R_1M_1$ ꝛc. in derselben gegenseitigen Lage construiren, in welcher sie auf der Fläche des vorgelegten Körpers liegen.

Geht man nun von den Polygonen zu den Curven über, das heißt vom Polyedrum zur vorgelegten Fläche, so wird jede auf dieser Fläche gezogene

Curve auf die Wiederkehrungsgränze, durch die Tangenten eben dieser Gränze zurückgebracht seyn. *)

Von den die Curven berührenden Ebnen.

§. 103.

Der Begriff, den man sich von einer eine krumme Fläche berührenden Ebne machen muß, führt die Bedingung mit sich, daß diese Ebne durch alle Tangenten gehen muß, welche man der vorgelegten Fläche durch den Punct, in dem sie von der Ebne berührt wird, führen kann.

Oder besser, wenn man sich durch den Berührungspunct so viele Ebnen als man will dergestalt geführt denkt, daß sie die vorgelegte Fläche schneiden, so müssen die hieraus erfolgenden Schnitte respectiv von den Geraden berührt werden, welche Durchschnitte der schneidenden Ebnen und der tangentirenden Ebne sind.

Zwey gerade Linien sind hinreichend, um die Lage einer Ebne zu bestimmen; mithin werden irgend zwey durch einen und denselben Punct einer krum-

*) Ich habe diesen Gegenstand in einer auf der Academie der Wissenschaften im Jahre 1790 abgelesenen Abhandlung analytisch aus einander gesetzt, und daselbst die Formeln gegeben, von denen die Umformung abhängt, welche eine Curve erleidet, wenn sie von einer Ebne in eine zerlegbare Fläche und umgekehrt übergeht.

men Oberfläche gemachte Schnitte, indem sie die Entstehung zweyer durch einen und denselben Punct gehenden Tangenten darbieten, zur Bestimmung einer eine vorgelegte Fläche tangentirenden Ebne hinreichen.

Wir wollen mehrerer Einfachheit in der allgemeinen Methode wegen, annehmen, daß man die vorgelegte Fläche durch zwey Ebnen geschnitten habe, von denen die erste horizontal ist, und zum Durchschnitt MZ'' Fig 72 giebt; die zweyte ist vertical, auf der Ebne DAB senkrecht und giebt zum Durchschnitt die Curve MX'.

Es ist klar, daß wenn man den Curven MZ'' und MX' Tangenten zu führen weiß, alsdann zwey Linien Mt und MT gegeben seyn werden, welche die verlangte berührende Ebne bestimmen.

Die Aufgabe einer krummen Fläche eine tangentirende zu führen, ist also auf die Untersuchung der Tangenten ebner Curven zurückgebracht. Dieses ist alles was man ohne Hülfe der Analysis thun kann, und wir wollen nur noch bemerken, daß noch zu beweisen ist, daß die durch die beyden Linien Mt und MT gehende Ebne, auch die Tangenten aller andern durch den Punct M in der vorgelegten Fläche gemachten Schnitte gehen muß.

Man sieht die Wahrheit dieses Satzes leicht ein; denn wenn er unrichtig wäre, so würde daraus folgen, daß man nicht allen Flächen im Allgemeinen berührende Ebnen führen kann, welches man aber durch die Analysis vollständig beweisen kann.

Hier sind nun einige besondre Fälle, in denen sich die Aufgabe modificirt und sehr einfach wird.

§. 104. Aufgabe.

Einem Cylinder eine berührende Ebne zu führen.

Die Entstehung des Cylinders ist von der Art, daß eine Ebne ihn nach einer geraden Linie berührt, welche nichts als die erzeugende Linie in einer ihrer Lagen ist; aber diese Ebne schneidet die horizontale nach einer Geraden P′F′ Fig. 73, welche die zur Basis des Cylinders dienende Curve berührt.

Hieraus folgt also, daß wenn man durch einen auf einer cylindrischen Fläche genommenen Punct M eine Gerade MP′ der erzeugenden AD parallel, und im Puncte P′ der zur Basis dienenden Curve die Tangente P′T führt, die verlangte berührende Ebne durch die Linien MP′ und P′T′ bestimmt seyn wird. Es wird also leicht seyn, ihre Durchschnitte mit jeder der coordinirten Ebnen zu finden.

§ 105. Erster Zusatz.

Wenn man der Basis des Cylinders Tangenten zu führen weiß, so kann man auch nach dem Vorhergehenden allen Durchschnitten des Cylinders durch irgend eine Ebne welche führen; denn es ist leicht einzusehen, daß die Tangenten dieser Curven die Durchschnitte der sie enthaltenden mit der den Cylinder berührenden Ebne seyn werden.

Im Allgemeinen wird, wenn eine Curve der

Durchschnitt zweyer krummen Flächen ist, und man kann jeder derselben berührende Ebnen führen, die vorgelegte zur Tangente haben den Durchschnitt zweyer Ebnen, welche diese krummen Flächen in dem Puncte, welchen man betrachtet, respectiv berühren.

Zweyter Zusatz.

Wir haben im §. 77. gezeigt, wie man eine Curve, deren Puncte nicht alle in einerley Ebne liegen, darstellen könne; aus allem was vorher gehet, folgt nun, daß man um einer Curve von dieser Art eine Tangente zu führen, die ihrer beyden Projectionen suchen muß.

In der That befindet sich die Curve zuvörderst auf dem auf ihrer horizontalen Projection errichteten Cylinder; ihre Tangente in irgend einem Puncte liegt also in der den Cylinder, von welchem eben geredet wird, berührenden Ebne. Aber diese Ebne ist auf der horizontalen senkrecht; ihr gemeinschaftlicher Durchschnitt mit dieser berührt die Basis des Cylinders, oder die horizontale Projection der vorgelegten Curve in einem Puncte, welcher die Projection desjenigen ist, in welchem sie die gegebene Curve berührt; dieser gemeinschaftliche Durchschnitt ist also die Projection auf der horizontalen Ebne der gesuchten Tangente.

Schließt man eben so bey der verticalen Ebne so wird man sehen, daß die durch den Punct der verticalen Projection, welcher mit dem gegebenen Punct correspondirt, geführte Tangente, die ver-

ticale Projection der verlangten Tangente seyn wird.

§. 106. Aufgabe.

Einem Kegel eine Tangente zu führen.

Die Auflösung dieser Aufgabe ist von der der vorhergehenden nur darin unterschieden, daß die Linie SP' Fig. 74. durch den Scheitel S gehen muß, anstatt wie beym Falle des Cylinders der erzeugenden Linie parallel zu seyn.

§. 107. Aufgabe.

Eine Ebne zu führen, welche eine durch Umdrehung entstandene Fläche in einem Puncte derselben berühre.

In diesem besondern Falle sind die einfachsten Schnitte, welche erhalten werden können, die auf der Umdrehungsaxe senkrechten Kreise, und die erzeugende Curve, welche immer aus dem in einem Körper vermittelst einer durch seine Axe gehenden Ebne gemachten Schnitt erfolgt.

Die berührende Ebne im Puncte M Fig. 75. wird also durch die Geraden Mt und MT bestimmt seyn, von denen die erste den Kreis MZ, und die andre die erzeugende Curve MX berühre.

Weiß man also dieser letztern eine Tangente zu führen, so kann man immer die Ebne construiren, welche die durch sie erzeugte Oberfläche berührt.

§. 108. Zusatz.

Wenn man den krummen Oberflächen berührende Ebnen zu führen weiß, so kann man Linien führen, welche auf diesen Flächen senkrecht sind; denn sie dürfen in dieser Hinsicht nur auf den berührenden Ebnen senkrecht seyn, und durch die Berührungspuncte gehen. Diese Linien werden die **Normalen** der vorgelegten Flächen genannt; eine Benennung, welche man auch den auf ebnen Curven senkrechten Geraden giebt.

Es waltet indessen zwischen den Normalen der ebnen Curven und denen der krummen Oberflächen der Unterschied ob, daß die ersten alle entweder einander schneiden oder parallel sind, da man hingegen bey letztern auf der vorgelegten Fläche gewisse Reihen von Puncten wählen muß, um deren einige zu finden, welche diese Eigenschaft haben. Im Allgemeinen liegen sie in verschiedenen Ebnen.

Die Curven von gedoppelter Krümmung, welche nicht in einer einzigen bestimmten Ebne liegen, können keine bestimmte Normalen haben; allein diese Linien werden durch Ebnen ersetzt, welche auf den Tangenten in den Berührungspuncten senkrecht sind, welchen man den Namen der **Normalebnen** giebt. Man kann diese Ebnen construiren, sobald man den vorgelegten Curven Tangenten zu führen weiß.

§. 109. Allgemeine Anmerkung.

Die krummen Oberflächen können in Rücksicht

ihrer berührenden Ebnen in zwey Klassen eingetheilt werden.

In der einen geschieht die Berührung der vorgelegten Oberfläche und der berührenden Ebne nach der ganzen Ausdehnung einer geraden Linie. Diese Klasse begreift alle zerlegbare Flächen, aber nur diese.

Jede der Oberflächen der andern Klasse hat mit ihrer berührenden Ebne nur einen oder mehrere, aber immer nur eine begränzte Anzahl von Puncten gemein.

Hieraus folgt, daß wenn man sich vorlegte den krummen Oberflächen durch außerhalb dieser Flächen liegende Puncte berührende Ebnen zu führen, oder sie durch Bedingungen zu construiren, welche diesen Flächen fremd sind, die Anzahl der Bedingungen bey der einen Klasse von Flächen nicht dieselbe wie bey der andern seyn wird.

So oft die Berührung nach einer geraden Linie geschehen soll, braucht man offenbar nur einen Punct oder eine Bedingung, um die Bestimmung der berührenden Ebne zu beendigen.

Also muß man sich im Allgemeinen vorlegen, durch einen gegebenen Punct einem Cylinder oder einem Kegel eine berührende Ebne zu führen; hingegen muß man einer durch die Umdrehung einer Curve erzeugten Oberfläche durch zwey Puncte oder durch eine gegebene Gerade eine berührende Ebne führen.

Wir wollen die Art, diese Aufgaben aufzulösen, nur anzeigen. Beym Cylinder ist klar, daß wenn man durch den gegebenen Punct eine der erzeugenden

Linie parallel führt, diese sich auf der gesuchten Ebne befinden muß, weil letztere die vorgelegte Fläche nach einer dieser Geraden parallelen Linie berühren muß; aber der gemeinschaftliche Durchschnitt dieser Ebne mit der horizontalen Ebne muß die Basis des Cylinders berühren; sie wird also durch die eben geführte Gerade, und durch die aus dem Puncte, worin sie die horizontale Ebne trift, der als Basis des Cylinders dienenden Curve geführte Tangente bestimmt seyn. Die Aufgabe ist also darauf zurückgeführt, dieser Curve durch einen außerhalb liegenden Punct eine Tangente führen zu können. Man kann dieses Verfahren auf den Kegel anwenden, wenn man die erste Gerade, von der eben geredet worden, durch den gegebenen Punct und den Scheitel legt.

Bey den zerlegbaren Flächen im Allgemeinen construire man ihre Durchschnitte mit irgend zweyen durch den gegebenen Punct geführten Ebnen; und wenn man durch den gegebenen Punct diesen Schnitten Tangenten führen kann, so werden diese die verlangte berührende Ebne bestimmen.

Wenn die vorgelegte krumme Oberfläche nicht zerlegbar wäre, so müßte man ihr durch eine Gerade eine berührende Ebne führen; und es ist klar, daß man nur nöthig hat auf dieser Oberfläche einen Punct zu finden, durch welchen man zwey durch die gegebene Linie gehende Tangenten führen kann; diese werden die gesuchte Ebne bestimmen.

Es ist klar, daß diese Gerade so angesehen wer-

den können, als gehörten sie zu zweyen Flächen, welche von Geraden gebildet werden, die unterworfen sind, die vorgelegte Fläche zu berühren und durch die gegebene Gerade zu gehen. Diese Flächen kann man folgendermaaßen construiren: man denke sich eine Reihe nach einem gewissen Gesetz geführter Ebnen, zum Beyspiel alle horizontal; und durch die Puncte, in denen sie die gegebene Gerade treffen, führe man den Schnitten, welche sie auf der vorgelegten Fläche machen, Tangenten; die Projectionen aller Berührungspuncte werden zu der Curve gehören, nach welcher diese Oberfläche von der berührt wird, welche aus der Zusammensetzung aller Tangenten entsteht, deren eben erwähnt worden. Man nehme dann schneidende Ebnen, welche einem andern Gesetze unterworfen sind, etwa vertical und parallel zu seyn, und suche auch die Berührungs-Curve der vorgelegten Oberfläche und derjenigen, welche aus allen den wie im Vorhergehenden von Puncten der gegebenen Geraden nach den neuen erhaltenen Schnitten geführten Tangenten entspringt. Es ist klar, daß jeder der Puncte, worin die Berührungs-Curven einander schneiden, auf zweyen Geraden liegt, welche die vorgelegte Oberfläche berühren, und durch die gegebene Linie gehen; diese Geraden bestimmen also eine der verlangten berührenden Ebnen.

Wenn der vorgelegte Körper ein durch Umdrehung entstandener wäre, und seine Axe vertical hätte, so würden alle horizontale Schnitte sowohl an und für sich als in ihrer Projection Kreise seyn;

und es würde nicht schwer fallen ihnen durch den Punct der gegebenen Geraden, welcher in der sie hervorgebrachten Ebne liegt, Tangenten zu führen. Was die verticale schneidende Ebenen trift, so müßte man sie unterwerfen durch die Axe zu gehen, um nur immer für alle Schnitte die erzeugende Curve zu erhalten. Wüßte man nun dieser Curve durch außerhalb liegende Puncte Tangenten zu führen, und man projicirte die Berührungen auf die coordinirten Ebnen, so würde man die Auflösungen wie oben beendigen.

§. 110.

Die Abtheilung, welche wir eben unter den Oberflächen in Beziehung auf ihre berührende Ebnen eingeführt haben, findet ebenfalls in Rücksicht auf ihre Krümmung statt. Man wird bemerkt haben, daß der Cylinder zum Beyspiel eine Richtung hatte, in welcher er von der Krümmung befreyet ist, und diese ist genau längs der erzeugenden Linie. Diese Eigenschaft hat er mit allen zerlegbaren Oberflächen gemein; denn da sie nach einer geraden Linie berührt werden, so haben sie in der Richtung dieser Linie keine Krümmung.

Man muß aber in dieser Betrachtung nicht die in §. 89 und 90 beschriebenen Curven mit einschließen, welche zwar wirklich aus geraden Linien gebildet sind, aber nicht nach der ganzen Ausdehnung dieser Geraden von einer Ebne berührt werden können.

Es ist zwar wahr, daß wenn die Flächen, von denen eben geredet wird, von einer durch die erzeugende Linie geführten Ebne geschnitten werden, der hierdurch erhaltene Schnitt keine Krümmung haben würde. Man muß aber nicht die Krümmung einer Oberfläche mit der ihrer Schnitte verwechseln; denn es ist klar, daß, wenn man der schneidenden Ebne gewisse Lagen giebt, diese Krümmung für einen und denselben Punct auf eine unendliche Anzahl Arten verändert werden kann.

So wie man bey den ebnen Curven die Krümmung in jedem Puncte durch die eines Kreisbogens mißt, welcher durch drey unendlich nahe an einander liegende Puncte geht, und dessen Mittelpunct sich auf dem Durchschnittspunct zweyer auf einander folgenden Normalen befindet; eben so muß man bey den krummen Oberflächen den Durchschnittspunct zweyer auf einander folgenden Normalen suchen, und durch diesen Punct auf ihrer Ebne eine Gerade senkrecht errichten, welche man als die Umdrehungsaxe eines kleinen Bogens der Curve betrachtet, welcher das Element der Oberfläche beschreibt; nur müssen sich in diesem Bogen auch zwey auf einander folgende sich schneidende Normalen befinden.

Alle diese Untersuchungen, welche ein Gegenstand der subtilsten und elegantesten Analysis sind, können nicht durch bloße geometrische Betrachtungen auf eine angemessene Art abgehandelt werden. Die Leser finden in den Memoiren der Academie zu Berlin im Jahre 1765, in denen der Academie zu Paris

1781, und endlich im zehnten Bande der fremden Gelehrten, alles was man über diesen Gegenstand wünschen könnte. (Man sehe auch den **Lehrbegriff der Differential- und Integral-Rechnung, erster Theil**).

Versuch einer Perspective.

§. 111.

Jedermann weiß, daß das Licht sich in gerader Linie ausbreitet, und daß die Gegenstände nur vermittelst der von ihnen ausgesandten Strahlen sichtbar werden. Alle diese Strahlen zusammen genommen bestimmen die Bilder der Körper.

So nehmen wir den Umfang des Vierecks ABCD Fig. 76 wahr, weil jeder seiner Puncte leuchtende Strahlen nach unserm Auge sendet*). Es

---

*) Wir haben das Object weiß oder gefärbt, und nicht schwarz angenommen; denn alsdann würde man es nur durch die Abwesenheit des Lichts sehen; daher wäre es bey dem Falle der Figur eigentlich richtig zu sagen, daß die Pyramide durch die Abwesenheit der Strahlen in dem von ihrer Oberfläche eingenommenen Raum bestimmt wird.

Wir sind überdieß genöthigt von den physicalischen Eigenschaften des Sehens zu abstrahiren; allein diejenigen unsrer Leser, welche damit bekannt sind, werden leicht einsehen, daß die Anwendung der Methode nichts desto weniger strenge ist.

ist leicht einzusehen, daß die Zusammensetzung dieser Strahlen eine Pyramide ist, welche von den aus verschiedenen Puncten des Objectes nach unserm Auge gezogenen geraden Linien gebildet ist.

Beschäftigen wir uns nun für jetzt bloß mit dem Umfang ABCD, so ist leicht einzusehen, daß alle auf der Fläche der Pyramide ABOCD liegende Puncte durch einige der von diesem Umfange nach unsrem Auge geführten Linien gehen werden. Die Bilder dieser Puncte müssen also mit denen der Durchschnitte des vorgelegten Umfangs und jeder der vorhergehenden Linien zusammen fallen. Denkt man sich nun, daß die Pyramide, von der eben geredet worden, von einer Ebne oder von irgend einer Fläche geschnitten wird, so wird der aus diesem Durchschnitte erfolgende Umfang fürs Auge dieselbe Form haben als das Viereck ABCD.

Es ist daher nicht nothwendig, unsern Augen den Gegenstand selbst vorzulegen, damit wir die Empfindung haben sollen, welche er in uns vermöge des Sehorgans hervorbringt; es genügt in dieser Absicht, eine Zusammensetzung von Sehstrahlen zu bestimmen, welche eben dieselbe Lage gegen einander haben, als die von den verschiedenen Puncten des Objects nach unserm Auge gehenden Strahlen *).

---

*) Es ist klar, daß man auch eine Perspective von dem Gegenstande bilden würde, wenn man annimmt, daß die Gesichtsstrahlen über den Gegenstand hinaus verlängert wären, um die hinter demselben liegende Tafel zu schneiden; das Bild würde dann größer als der Gegenstand

Hieraus entspringt die Möglichkeit, die Körper auf einer Ebne darzustellen; denn denkt man sich die aus den von verschiedenen Puncten des Körpers nach dem Auge geführten Strahlen gebildete Pyramide von einer Ebne geschnitten, so wird das daraus erfolgende Bild sehr geschickt seyn, die Empfindung von dem Umfange des Körpers und der gegenseitigen Lage der verschiedenen Theile desselben hervorzubringen.

Aus dem Vorhergehenden folgt, daß die Bestimmung dieses Bildes einzig und allein von der Untersuchung der Durchschnitte der von verschiedenen merkwürdigen Puncten des Objectes nach dem Auge geführten Linien, und der Ebne oder Fläche abhängt, auf welcher es dargestellt werden soll.

Die gegenseitige Lage des Auges, der Tafel und des Objectes müssen bestimmt werden, damit es das Bild sey. Die Kenntniß der wirklichen Form, und der Dimensionen des Körpers, welchen man darstellen will, wird die Projectionen der merkwürdigsten Puncte geben, welche seinen Umfang und die Lage der ihn zusammensetzenden Theile bestimmen. Die Aufgabe wird also darauf zurückgeführt seyn, auf der Tafel das Bild eines jeden dieser Puncte, das heißt, den Durchschnitt einer gegebenen geraden

---

seyn. Man könnte auch die Tafel hinter das Auge legen, indem man die Pyramide über ihren Scheitel hinaus verlängert; das Bild würde dann umgekehrt seyn.

Linie mit einer ebenfalls gegebenen Ebne oder Fläche zu finden.

Ich will die verschiedenen Fälle dieser Aufgabe durchgehen, ohne mich gleichwohl in irgend ein Detail einzulassen, welches die mir vorgeschriebenen Gränzen übersteigt.

§. 112. Aufgabe

Auf einer ebnen, auf irgend eine Art liegenden Tafel, die Perspective eines gegebenen Punctes des Raums zu finden.

Man nehme die verticalen Projectionen der vorgelegten Puncte auf einer Ebne, welche auf dem gemeinschaftlichen Durchschnitt der Tafel mit der horizontalen Ebne senkrecht ist.

Es seyen Fig. 77. T′AT″ die Tafel; O′ und O″ die Projectionen des Auges O, P″ und P″ die des in Perspective zu setzenden Punctes P; so werden O′P′ und O″P″ die Projectionen des Gesichtsstrahls OP seyn.

Der Durchschnitt p dieser Linie und der Tafel wird die gesuchte Perspective bestimmen; da dieser Punct aber auf der Tafel construirt werden muß, so werden die Projectionen p′ und p″ nicht hinreichend seyn; man muß in dieser Absicht das Verfahren des §. 51. anbringen, nach welchem man die Entfernungen Ap und Ap″ eben dieses Punctes von zweyen in der Tafel auf einander senkrechten Linien AT′ und AT″ finden kann. Die erste, welche der Durchschnitt der Tafel mit der horizon-

talen Ebne ist, auf welcher die Objecte ruhen, wird in der Perspective die Grundlinie genannt.

Es genügt alsdann p′p auf AT′ senkrecht zu fällen, um den Abstand des Punctes p von der Geraden AT″ zu erhalten. Dieses wird augenscheinlich, wenn man sich die verticale Ebne *p′pp* der T′AB parallel denkt; es ist überdieß leicht einzusehen, daß Ap″ der Abstand des gesuchten Punctes von der Grundlinie AT′ ist.

§. 113.

Wenn die Tafel auf der horizontalen Ebne senkrecht ist, wie T′At″ angiebt, so bestimmen die Projectionen O′P′ und O″P″ selbst durch ihren Durchschnitt mit den Geraden T′A und t″A die Entfernungen Aq′ und Aq″ der Perspective q von jeder dieser Geraden.

§. 114.

Wir haben als Beyspiele eine Pyramide gewählt, deren vier körperliche Ecken ihre Scheitel auf den äußersten Puncten der durch die Puncte O′ und O″ geführten Strahlen haben. Die Construction der Perspective eines dieser Scheitel ist durch dieselben Buchstaben bezeichnet wie in der Figur 77.

§. 115.

In dem Falle, wo die Tafel senkrecht ist, vereinfacht man die Construction sehr, wenn man die Ebne der Tafel selbst für die coordinirte verticale

Ebne nimmt. Wenn das Auge alsdann hinter der Tafel ist, so hat es seine horizontale Projection in O'; die des vorgelegten Punctes ist in P', und p ist die Perspective dieses Punctes.

§. 116. Anmerkung.

Wenn der darzustellende Gegenstand von geraden Linien und von Ebnen begränzt wäre, so würde man sein Bild construiren, indem man die Perspectiven der Scheitel der ihn begränzenden körperlichen Ecken suchte; und man wird in dieser Absicht nur das eben angezeigte Verfahren zu wiederholen haben. Zwey Puncte bestimmen eine gerade Linie, und die Flächen des vorgelegten Gegenstandes werden von einer gewissen Anzahl Linien gebildet seyn.

Wenn der Gegenstand von krummen Oberflächen begränzt ist, Fig. 78. so bietet sich kein faßlicher Punct dar, um seine Form zu bestimmen; man muß alsdann vorläufig seinen perspectivischen Umfang finden.

Der perspectivische Umfang ist nichts anders, als die Curve, welche in einem Körper die sichtbaren Theile von den unsichtbaren absondert; und er ist offenbar durch alle die Puncte gebildet, in denen die Gesichtsstrahlen die Oberfläche des Körpers nur berühren. Denkt man sich eine Kegelfläche, deren Scheitel im Auge liegt, und welche den vorgelegten Körper dergestalt umgiebt, daß sie ihn berührt, so werden die Berührungscurven genau die des scheinbaren Umfangs seyn.

Schneidet man diesen Kegel durch verschiedene durchs Auge nach einem beliebigen Gesetze geführte Ebnen, so wird jede derselben in dem vorgelegten Körper einen Schnitt bilden, welcher von zweyen erzeugenden Linien des Kegels berührt werden wird. Hieraus ergiebt sich eine allgemeine Methode, den perspectivischen Umfang einer krummen Oberfläche zu construiren.

Man denke sich diese Oberfläche durch eine Reihe verticaler Ebnen, wie OO′P′P Fig. 77 geschnitten, welche alle durchs Auge gehen; man construire die Projection P″X″ auf der verticalen Ebne aller dieser Schnitte, und führe aus dem Puncte O″ dieser Curve eine Tangente O′P′. Hat man alsdann die Projectionen des Gesichtsstrahls, so kann man wie in der vorhergehenden Aufgabe die Perspective des auf der Gesichtsgränze des vorgelegten Objectes, oder auf dessen perspectivischem Umfang liegenden Punctes P finden.

Man sieht, daß diese Methode fast mit derjenigen überein kommt, welche wir gegeben haben, um die Durchschnitte der krummen Oberflächen zu finden; es ist daher leicht einzusehen, daß sie so wie diese letztere für den Fall gewisser Flächen auf einfachere Verfahrungsarten zurückgebracht werden kann, wenn man das System der schneidenden Ebnen dem der Entstehung dieser Flächen unterwirft; da wir aber nicht zur Absicht haben, einen vollständigen Lehrbegriff der Perspective zu schreiben, so darf ich mich auch nicht in diese Auseinandersetzungen einlassen.

§. 117. Anmerkung.

Es giebt noch eine Art Perspective, welche von einem sehr großen Gebrauch ist. Man nimmt alsdann an, daß das Auge vom Gegenstande unendlich weit entfernt ist. Hierdurch können die Gesichtsstrahlen als einander parallel angesehen werden; und nachdem man die Richtung, nach welcher die Körper gesehen werden müssen, durch irgend eine gerade Linie bezeichnet hat, so braucht man nur noch, um Puncte in Perspective zu setzen, durch diese Puncte der gegebenen Linie parallele Linien zu führen, und ihren Durchschnitt mit der Tafel zu finden.

Man sieht ferner, daß bey dieser Annahme, der perspectivische Umfang eines Körpers durch seine Oberfläche berührende, und einander parallele Linien bestimmt seyn wird, welche zusammen einen Cylinder bilden.

Um diese Tangenten zu bestimmen, wähle man die schneidenden Ebnen vertical und der gegebenen Linie parallel; und die den verticalen Projectionen der Schnitte zugehörigen Tangenten, müssen der Projection der gegebenen Linie, welche die Richtung des Gesichtsstrahls angiebt, parallel geführt werden.

Diese Perspective ist eine Art von Projection, welche man anwenden könnte, um die Aufgaben von der Gattung aufzulösen, welche ich im ersten und zweyten Abschnitte dieses Werks abgehandelt habe; denn nichts nöthigt uns durch senkrecht zu projiciren, und in sehr vielen Fällen werden sogar die

Auflösungen einfacher, wenn man durch schiefe Linien projicirt.

Ich will noch einige Sätze vortragen, welche als Fundament einer sehr ausgebreiteten Methode der Perspective dienen, und welche sich mit vieler Leichtigkeit auf die von Ebnen und geraden Linien begränzten Körper anwenden läßt.

§. 118. Lehrsatz.

Wenn man Fig. 80. eine auf irgend eine Art gegen die Tafel T'A' liegende gerade Linie PP' hat, und man führt ihr durchs Auge eine parallele OO', so wird der Punct O', in welchem diese letztere die Tafel trifft, zur Perspective der vorgelegten Geraden gehören.

Alle vom Auge nach den verschiedenen Puncten der vorgelegten Geraden geführte Linien bilden eine Ebne, welche durch ihren Durchschnitt mit der Tafel die Perspective dieser Geraden bestimmen; da nun die Linie OO' der vorgelegten parallel ist, und durchs Auge geht, so muß sie nothwendigerweise in dieser Ebne liegen; es wird daher der Punct O' worin sie die Tafel trifft, zur gedachten Perspective gehören.

§. 119. Anmerkung.

Es ist überdieß klar, daß der Punct P', worin die vorgelegte Gerade selbst die Tafel trifft, auch zu ihrer Perspective gehört. Um also diese Perspective zu zeichnen, braucht man bloß die Puncte zu kennen,

worin die vorgelegte, und eine ihr durchs Auge parallel geführte Gerade die Tafel schneiden.

§. 120. Erster Zusatz.

Aus dem Vorhergehenden folgt, daß die Perspectiven so vieler parallelen Linien als man will, alle einander in einem und demselben Puncte der Tafel schneiden. Dieser Punct wird in den Lehrbüchern der Perspective der Accidentalpunct genannt.

Denn durchs Auge kann nur eine einzige allen diesen parallele Linie geführt werden, und ihre Perspectiven müssen nothwendigerweise durch den Punct gehen, worin sie die Tafel trifft.

§. 121. Zweyter Zusatz.

Wenn die vorgelegten Linien der Tafel parallel wären, so würde die durchs Auge geführte Gerade OO' die Tafel nicht treffen, und die Perspectiven würden folglich einander parallel seyn.

Man kann sich von der Wahrheit dieses Satzes durch folgende Schlüsse a priori überzeugen. Da die beyden vorgelegten Geraden einander parallel sind, so werden die aus allen von den verschiedenen Puncten dieser Linien nach dem Auge gezogenen Strahlen gebildeten Ebnen, nothwendigerweise ihren Durchschnitt eben diesen Linien, und folglich der Tafel parallel haben. Da nun die Perspectiven einander nur in dem diesem Durchschnitte und der Tafel gemeinschaftlichen Punct schneiden können, so werden sie einander parallel seyn.

§. 122. Dritter Zusatz.

Hieraus ergiebt sich eine sehr einfache Methode, Linien und Puncte in Perspective zu setzen.

Man fälle Fig. 81 vom Auge auf die Tafel die senkrechte OO''; so wird der Punct O'' in welchem sie letztern schneidet, der Augenpunct genannt. Aus dem Vorhergehenden folgt, daß alle Perspectiven der auf der Tafel senkrechten Linien in diesem Puncte zusammen treffen müssen.

Man projicire also den vorgelegten Punct P auf die Tafel, welche wir vertical annehmen, so wird der Punct P'', wohin diese Projection fällt, derjenige seyn, worin die vom vorgelegten Punct auf die Tafel geführte senkrechte dieselbe schneidet; und die Perspective dieser Geraden wird P''O'' seyn.

Man ziehe alsdann P'M unter einem halben rechten Winkel gegen AB geneigt; diese Projectionen einer durch den Punct P gegen die Tafel unter diesem Winkel horizontal geführten Linie, und ihr Durchschnitt mit dieser Ebne werden im Puncte M'' statt haben, welcher in der der P'P gleichen Höhe MM'' liegt. Nimmt man indessen auf der der AB parallelen O''D'' eine dem Abstande des Auges von der Tafel gleiche Größe O''D'', so ist leicht einzusehen, daß die Linie OD'' allen denen parallel seyn würde, welche man nach der Richtung von MP' unter einem Winkel von 45° gegen die Tafel führen würde; mithin müssen die Perspectiven dieser Linien sich alle im Puncte D'' schneiden. Nachdem man dann M''D'' gezogen hat, muß diese Gerade die Per-

Perspective des Punktes P enthalten; aber die Perspektive muß sich auch auf O''P'' befinden; sie ist mithin in R''.

§. 123. Anmerkung.

Man kann noch die Perspective vermittelst des **Tiefenmaaßstabes** ausüben, welches den Grundriß und Aufriß zu ziehen überhebt, und welches auf folgender Construction beruhet.

Man bringe die Objecte auf drey auf einander senkrechte Ebnen zurück; die erste sey horizontal und gehe durch die Grundlinie AB Fig. 82; die zweyte sey vertical, auf der Tafel senkrecht, und gehe durch den Rand BT; die dritte ist die Tafel AT selbst, welche ich hier senkrecht annehme. Ein Punct würde also gegeben seyn, wenn man seine respectiven Entfernungen von diesen drey Ebnen wüßte (§. 24). Der Abstand von der Tafel wird auf BC gerechnet, der Abstand von der durch BC und BT gehenden verticalen Ebne wird auf AB gerechnet, und endlich wird der Abstand von der horizontalen Ebne, oder die Höhe des Punctes auf BT gerechnet. Dieses vorausgesetzt, braucht man nur, da die beiden Linien AB und BT in der Tafel liegen, auf dieselbe die Abtheilungen der dritten BC überzutragen, welches geschieht, wenn man nach dem Augenpunct die Linie BO'' zieht, welche die Perspective von BC seyn wird, und indem man ferner nach dem Abstandspunct D'' die Geraden aD'', 1D'', aD'' ꝛc. zieht, welche die BO'' in den

Puncten c, 1, 2, 3 rc. schneiden werden, die mit den Theilen Bb, b1, 12 rc. der Linie BC correspondiren.

Die auf diese Art eingetheilte Linie BO'', ist der **Tiefenmaaßstab**, welcher die perspectivische Tiefe der Gegenstände auf der Tafel angiebt; und zieht man durch die Theilungspuncte dieses Maaßstabes gerade Linien der AB parallel, so können diese als die **Grundlinen** der verschiedenen Ebnen angesehen werden, welche der Tafel in den durch die correspondirenden Abtheilungen des Maaßstabes angezeigten Tiefen parallel geführt sind: sie werden die Perspectiven der horizontalen Projectionen oder der Fußpuncte aller in diesen Ebnen liegenden Objecte enthalten.

Nimmt man dann auf der Geraden AB, welche man den Frontenmaaßstab nennt, einen Theil Be der Entfernung gleich, in welcher sich der vorgelegte Punct von der durch BC und BT gelegten verticalen Ebne befindet, und zieht nach dem Augenpunct die Gerade eO'', so wird der Durchschnitt dieser mit der der AB parallelen g^2, die Perspective der horizontalen Projection, oder des Fußes des vorgelegten Objects geben.

Nimmt man endlich auf BT, dem **Höhenmaaßstab** den Theil ef der Höhe des vorgelegten Punctes gleich, und zieht fO'', so wird diese letztere die auf g2 senkrechte gh im Puncte h treffen, welcher die Perspective des verlangten Punktes seyn wird.

Man sieht, daß dieses Verfahren, wenn man unmittelbar auf der Tafel operirt, die Perspective aller Objecte giebt, welche man darin darstellen will, sobald man den Tiefenmaaßstab construirt hat.

Man kann auch, wenn die Dimensionen der Tafel zu groß sind, um darin die Ausführung einer schweren Construction zu vollziehen, die Abtheilungen des Tiefenmaaßstabes berechnen, wenn man die ähnlichen Dreyecke $O''c\ D''$ und acB betrachtet, woraus folgt

$$aB : Bc = O''D'' : O''c$$
$$aB + O''D'' : Bc + O''c = aB : Bc$$
$$aB + O''D'' : BO'' = aB : Bc.$$

Die Abtheilungen dieses Maaßstabes geben die Entfernungen der Geraden, welche die gemeinschaftlichen Durchschnitte der perspektivischen parallelen Ebnen darstellen, von der der Tafel y. Die Höhen gh lassen sich ebenfalls durch eine einfache Proportion berechnen, indem man hat $ef : hg = eO'' : gO''$ und weil sich offenbar die Geraden eO'' und gO'' wie die Entfernungen BO'' und $O''2$ zu einander verhalten.

Wir wollen noch bemerken, daß der Gebrauch des Proportionalzirkels die Operationen der Perspektive sehr erleichtert, und daß er besonders sehr bequem ist die perspektivischen Höhen zu bestimmen.

Die Proportion $aB : Bc = O''D'' : Oc$ würde die Entfernung $O''D$ des Auges von der Tafel

geben, wenn man die Gerade BO'', den Raum aB, und dessen Perspektive Bc hätte.

§. 124. Allgemeine Anmerkung.

Wir haben im Vorhergehenden die allgemeinen Mittel gegeben, um die scheinbaren Umrisse und die merkwürdigsten Puncte der Objecte in Perspective zu setzen; aber diese Verfahrungsarten, welche die Linearperspective ausmachen, sind nicht hinreichend zur vollständigen Darstellung der Körper.

Die erleuchteten Theile oder die Lichtparthien, die Schatten und das in einander Schmelzen der Farben tragen bey das Hervorgehende, das Zurücktretende und die Entfernungen sinnlich zu machen. Alle diese Umstände lassen sich strenge durch Methoden bestimmen, welche den bisher gegebenen analog sind. Man darf in dieser Absicht nur den Vortrag der Aufgabe dergestalt entwickeln, daß man daraus die mathematischen erkennt, welchen ein Genüge geschehen muß.

Für die Schatten zum Beyspiel, sieht man leicht ein, daß sie, wenn der leuchtende Körper auf einen Punct zurückgebracht ist, durch den Raum bestimmt seyn werden, welcher in einer Kegelfläche liegt, die den undurchsichtigen Körper berührt und ihre Scheitel im leuchtenden Puncte hat.

Um folglich den Schatten zu bestimmen, welcher auf irgend eine Fläche fällt, braucht man bloß den zu Raum suchen, welchen dieser Kegel von

der erwähnten Fläche abzieht, welcher Raum durch die Curve bestimmt wird, die der Durchschnitt des eben erwähnten Kegels und der vorgelegten Fläche ist.

Wir können hier nicht diese Gegenstände betrachten, welche der Geometrie fremde Kenntnisse erfordern; wir haben deren bloß erwähnt, um zu zeigen von welchem Nutzen die Fertigkeit der Betrachtungen der Geometrie des Raums in den Künsten seyn könnte *)

Die Gnomonik, über welche so viele volumineuse Bücher geschrieben sind, können demjenigen, der diese Geometrie wohl inne hat in keinem Falle Schwierigkeiten machen. Sobald er nur weiß was eine Sonnenuhr im Allgemeinen ist, so kann er eine dergleichen zeichnen von welcher Art sie auch seyn

*) Die oben angezeigten Theorien beruhen auf physicalischen Betrachtungen und auf noch sehr wenig ausgebreiteten sehr delicaten Versuchen und begreifen das, was die Künstler die Luftperspective, das Helldunkel nennen. Man kann in dieser Absicht das Werk von Lambert zu Rathe ziehen, betitelt photometria ꝛc. und eine Abhandlung von demselben Verfasser in dem Bande der Academie zu Berlin vom Jahre 1774. Es wäre sehr zu wünschen, daß Monge die über diesen Gegenstand der polytechnischen Schule gegebenen Begriffe ausdehnte und bekannt machte. Vermittelst dieser Auseinandersetzungen wurden verschiedene methaphorische Ausdrücke, welche die Künstler oft brauchen, um sehr feine Versuche anzugeben ihren gehörigen Sinn erhalten; welche aber die Liebhaber wiederholen ohne sie zu verstehen, und welche desto mehr Glück machen, je fremder sie scheinen.

mag, und auf welcher Fläche es auch sey, wenn er nur die Entstehung dieser Fläche kennt; denn alsdann hat er nur nöthig Durchschnitte gegebener Flächen und Ebnen zu suchen.

Montecla hat in seiner Geschichte der Mathematik, eine Definition von der Gnomonik gegeben, an welche sich die Verfahrungsarten, welche ich im Vorhergehenden auseinandergesetzt habe, genau anschließen.

„Man habe (sagt er) zwölf Ebnen, die sich alle in einer und derselben Linie unter einem gleichen „Winkel schneiden, und diese Ebnen unbegränzt verlängert treffen eine andre in irgend einer Lage; es „soll nun die Linie bestimmt werden, in welcher sie „sich schneiden.“

Die geringe Anzahl Methoden die er zur Auflösung dieser Aufgaben giebt, sind zugleich sehr einfach und sehr allgemein, und eine derselben schlägt in die Operationen ein, auf welche diejenigen unsrer Leser, welche die im ersten Theile auseinandergesetzten Mittel anwenden wollten, geleitet würden.

Bey dem

Buchhändler Heinrich Frölich

in Berlin

sind nachstehende mathematische Werke verlegt worden und um beigesetzte Preise durch alle Buchhandlungen zu erhalten.

Hoffmann. Mathematische Elementarschule oder Anleitung zum kunstlosen Denken über mathematische Gegenstände, mit 7 Kupf. 8 2 thl.

Ide. J. J. A. Theorie der Bewegung der Weltkörper unsers Sonnensystems und ihrer elliptischen Figur nach de la Place frei bearbeitet mit einer Vorrede vom Hofrath Kästner (Holzschnitte zwischen dem Text) gr. 8. Engl. Druckpapier 1801. 2 thl.

Derselbe. System der reinen und angewandten Mechanic fester Körper. 2 Th. gr. 8. mit Kupf. 1802. 3 thl.

Derselbe. Anfangsgründe der reinen Mathematik zum Leitfaden seiner Vorlesungen entworfen, gr. 8. 1803. Arithmetik u. Geom. mit 2 K. 1 thl. 12 gr.

Karsten. J. Ch. G. (Privatdocent auf der Academie zu Rostock.) Die Anwendbarkeit und Construction des Bohlendaches theoretisch und praktisch untersucht auch mit Rückblicken auf die Geschichte desselben versehen; 8. 18 gr.

Krause. G. F. Handbuch der mathematischen Forstwissenschaften. Mit Tabellen und Kupfern, gr. 8. 1800 2 thl.

La Croix's. S. F. Anfangsgründe der Arithmetik, als Einleitung zur Algebra; a. d. Franz. übers. und mit Zusätzen begleitet von C. M. Hahn, gr. 8. 1804.

— — Anfangsgründe der Algebra. Aus dem Französischen übersetzt und mit Anmerkungen und Zusätzen begleitet von C. M. Hahn, 1r Th. 1 thl. 16 gr.
2r Th. 1804. 8. 1 thl. 8 gr.

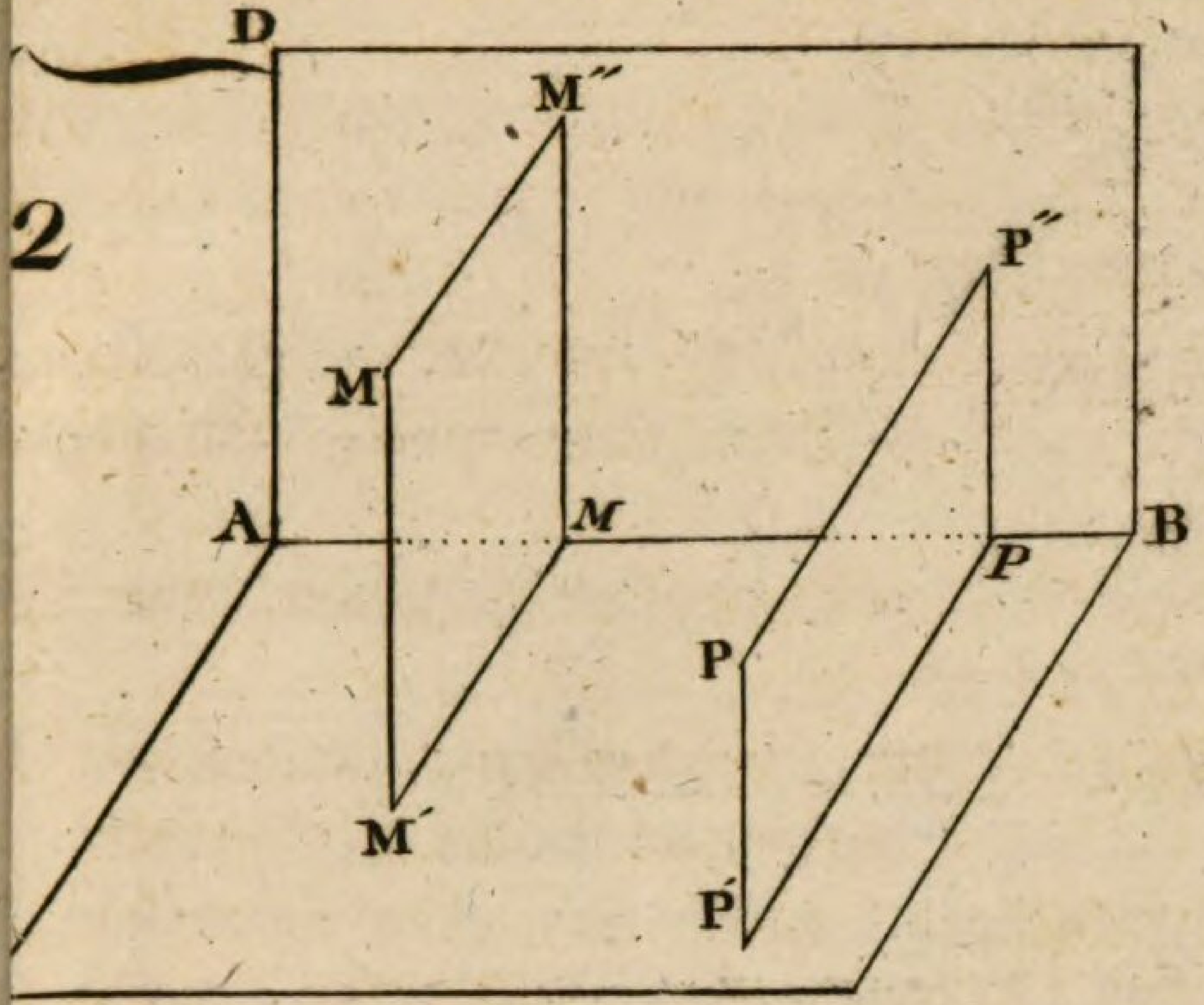
La Croix's. S. F. Anfangsgründe der Trigonometrie. Aus dem Franz. übersetzt, und mit Anmerkungen begleitet, von C. M. Hahn, 1 thl 16 gr

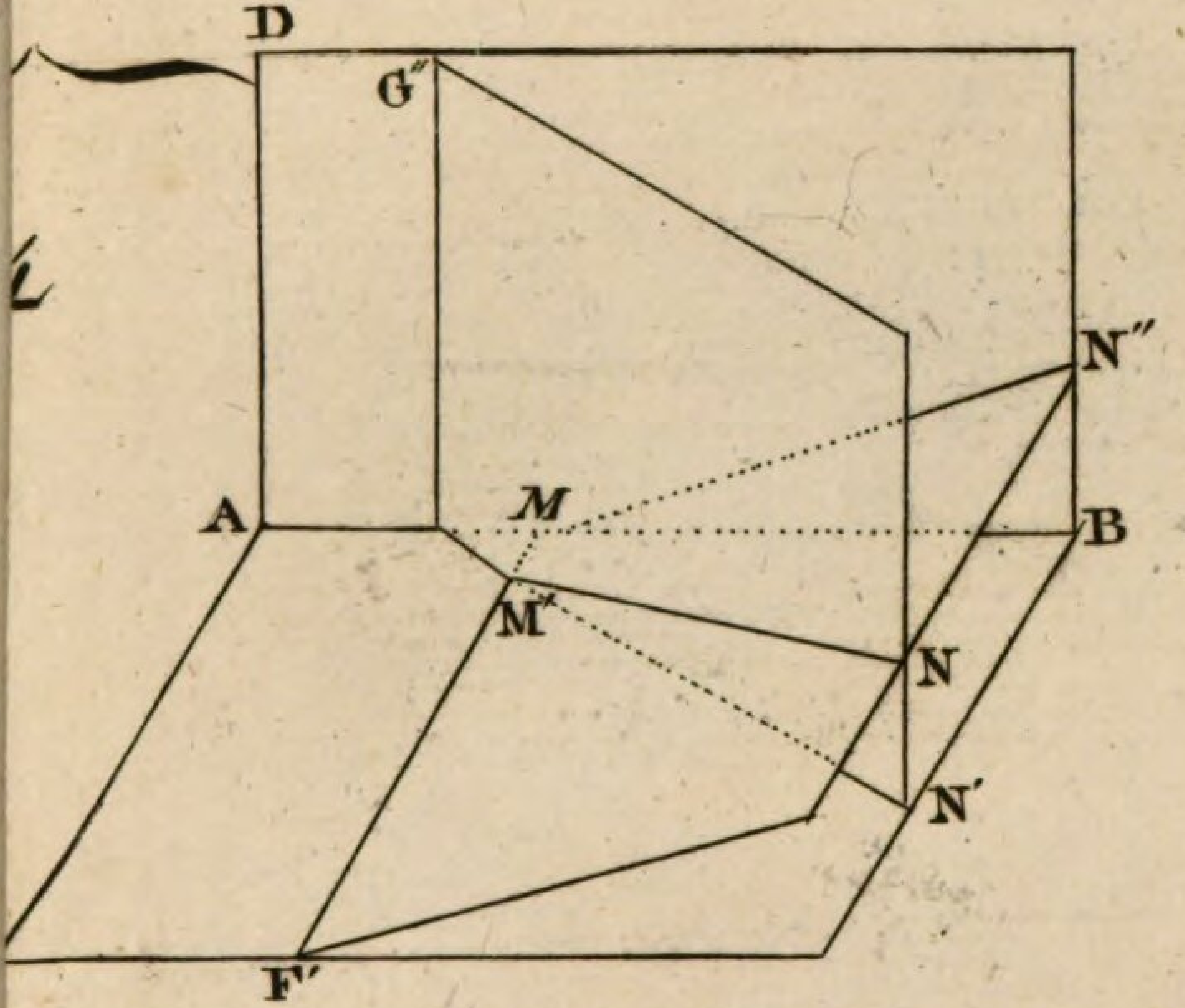
Meyer Hirsch, Sammlung von Beyspielen, Formeln und Aufgaben, aus der Buchstabenrechnung und Algebra. 8. 1804. 1 thl.

— — Sammlung geometrischer Aufgaben. 1ster Th. mit Kupf. 1 thl. 16 gr.

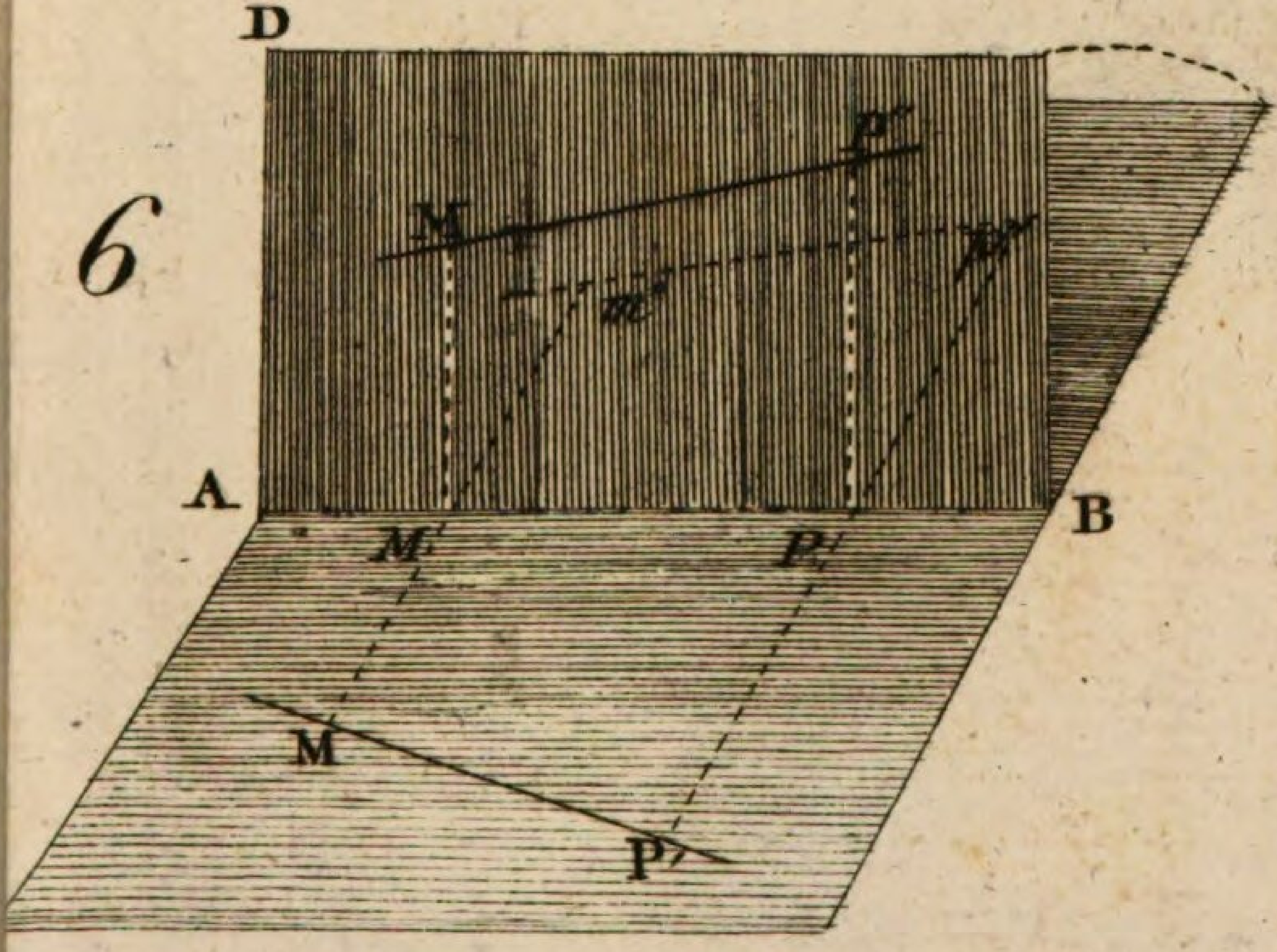
Zimmermann. C. G., Entwickelung analytischer Grundsätze für den ersten Unterricht in der Mathematik, besonders für diejenigen, welche sich ohne mündliche Anweisung darüber belehren wollen. Mit einer Kupfert. gr. 8. 1805. 2 thl.

2





6



F.H. sculp.

P
Q
Q

F. H. sculp.

18
D
N′
Q″
P″
A
Q
O
M
B
P
M′
C
21
D
M″
M
G
A
M′
B
L
M′
C
26
F′
N
M
N′
G′
M′
m
P′
E
P
M″
M
M″
M′
B
M
P″
P
B
P′
N′
C
M″
D
M″
L
P″
M′
E
A
L
M
P′
E′
C

29
G
E′
G′
G″
A
F′
H′
E
B
F″
34
D
N″
P″
A
M
B
p′
p
P′
p″
F
N
q″
C
N′
e″
37
D
H″
P
M″
A
M
B
M′
P′
C
H′
P
B
P
E
e′
N′

41
A
B
C
D
M
N
O
P
G
N′
M′
P′
Q′
H
45
D
O″
E″
H″
A
R
E
B
O′
Q′
P
C
46
48
P″
P″
M″
P′
D
A
P
M
E″
P′
P
M′
M′
F′
C
N
G′
H′
F
B

50
54
O
D
A
C
I
B
C
P″4
E″
P″2
L″2
F
G″
L″1
I″
P″3
P″1
I″
G″
P′2
L′1
P′4
L′2
P3
E′
P3
L2
P′4
P′1
L1′
P′2
F′

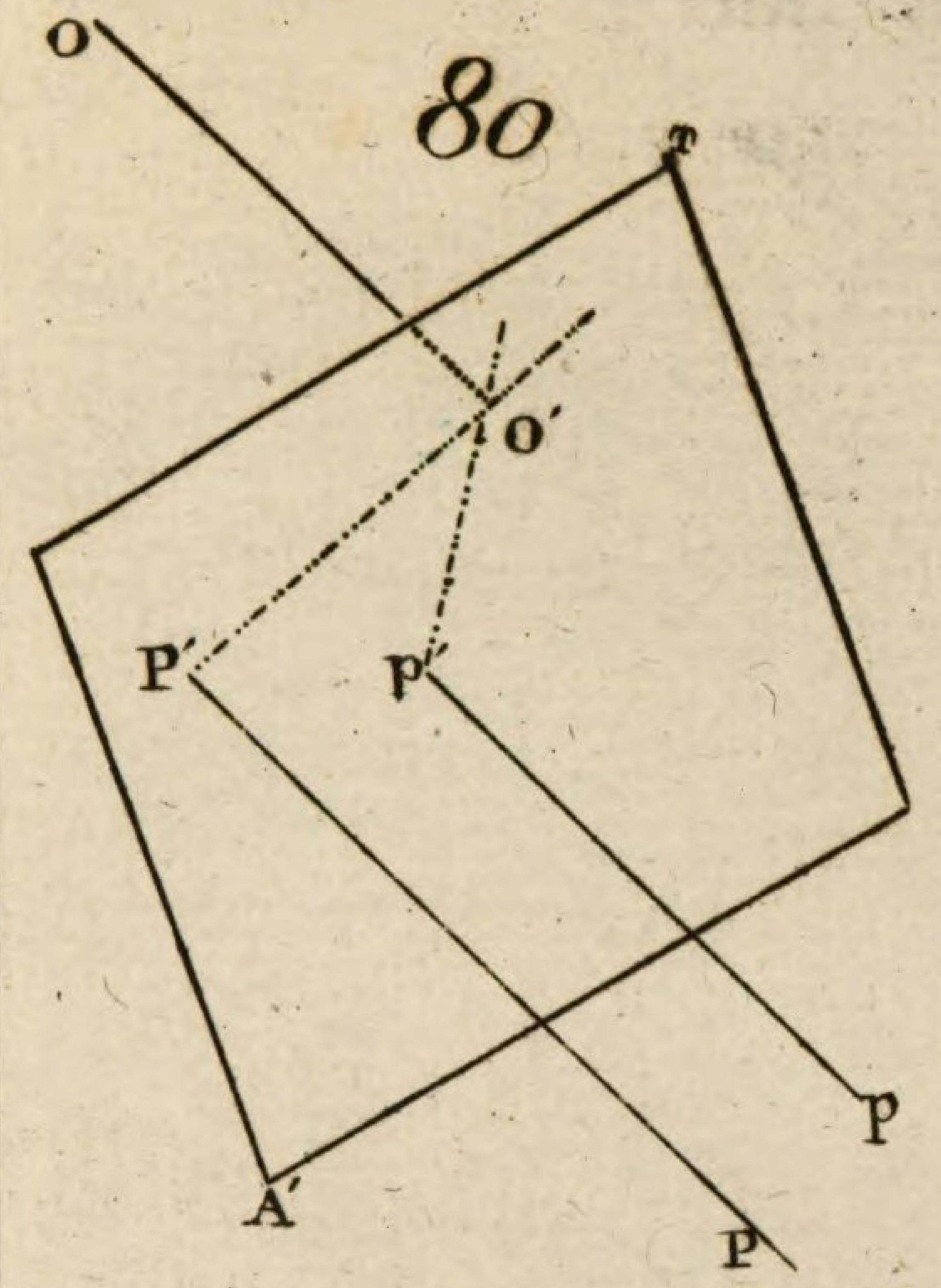
56
S″
p
p
h
𝔊
E″
m
P
P
I
p
S
B
S′
H″
G′
H′
P
E′
L′
K
F′
L′
s
S
57
m
M
D
S″
3
2
4
1
E′
f
f
F
F
A
E
S
f
F′
3 2
4 1
F
M′
e
m′
f′
f′

Henschel. sc.

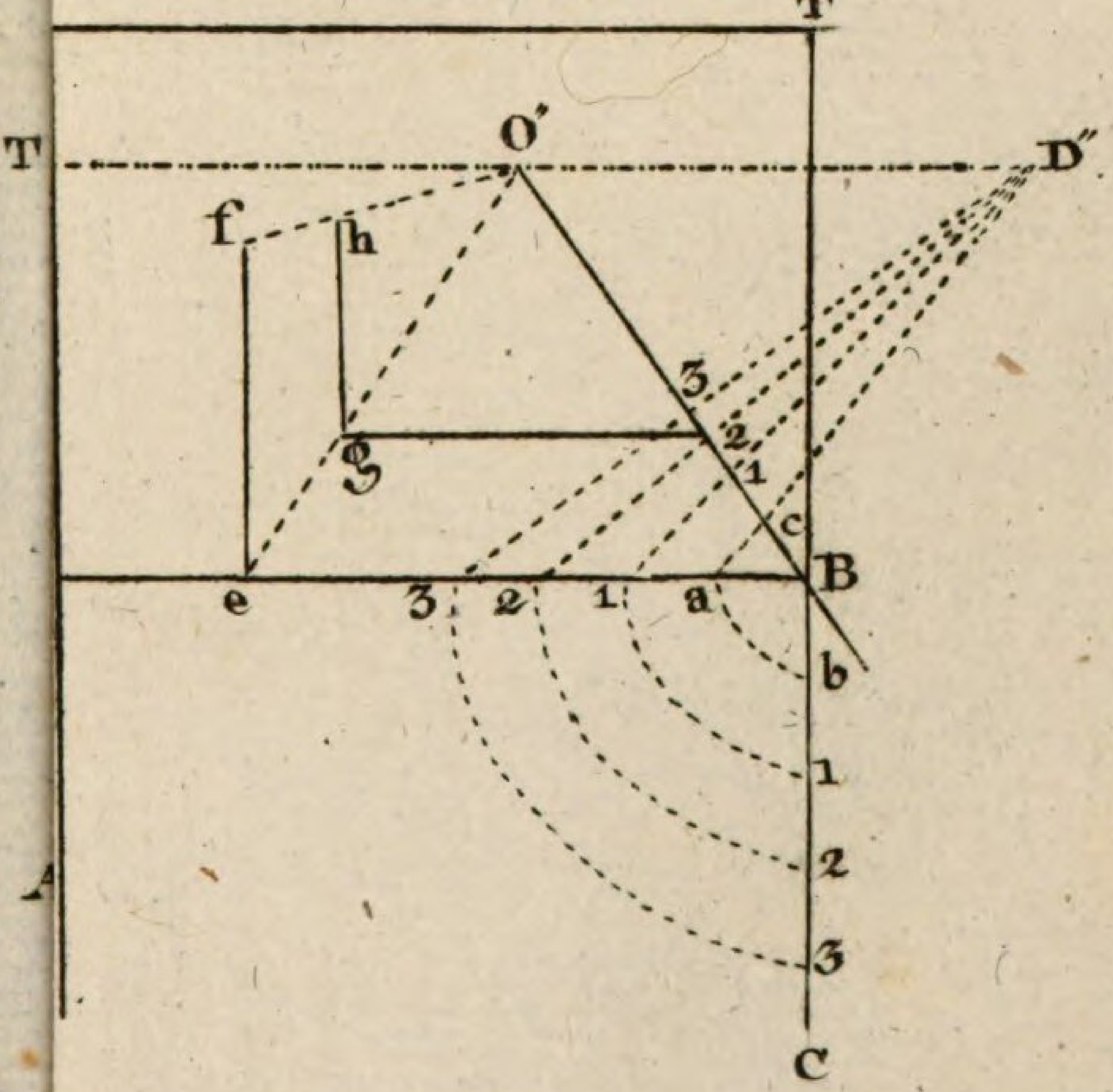
61
E
K
K
F
O
62
D
E′
P′
X′
M′
E
P
M
X
P
A
B
F
P
X′
M′
C
66
P
Z
X
T
G
M
O
H
Z
Q
70
S
M4
F
F4
M3
F2
F1
F3
M
M2
M1
E
E4
E1
S
E2
f4
m3
f3
f
f2
f1
m
m2
m
P2
P3
M4
R
C
N
R1
R2
N1
R3
N2
N3
C

Henschel

80



82



Henschel sc.

1.

Sammlung
verschiedener Aufgaben
der
Geometrie
aufgelöst und bewiesen
durch die
algebraische Analysis;
als
weitere Ausführung
zu
Lacroix's Trigonometrie
und
höhern Geometrie

von

Louis Pouissant,

Professor der Mathematik.

Aus dem Französischen übersetzt

von

E. M. Hahn,

Königl. Preuß. Kammerkondukteur.

Berlin, 1806.

In der Frölichschen Buchhandlung.

Sr. Hochwohlgebohren

dem Herrn

Chriſtian Maximilian Baron von Bergh,

Chur-Heſſiſchem Major und Hofkavalier Ihrer Königl. Hoheit der verwittweten Prinzeſſin Heinrich von Preußen

als Beweis

der

innigſten Hochachtung und Freundſchaft

gewidmet

vom Ueberſetzer.

Vorrede.

Ueber den Zweck, den ich bey Uebersetzung des Werks von Lakroix vor Augen gehabt, habe ich mich hinlänglich in der Vorrede zur Algebra erklärt. Aufgemuntert von dem gütigen Beyfall, den mein Unternehmen sowohl als meine Arbeit in den gelehrten Zeitungen erhielten, faßte ich den Entschluß, das ganze Werk bald möglichst meinem Vaterlande brauchbar zu machen, und, wo mich nicht Berufsgeschäfte davon abhalten, sollen nächstens die An-

fangsgründe der Differential- und Integralrechnung, mit möglichstem Fleiße ausgearbeitet erscheinen. Ob nun gleich gegenwärtiges Werkchen nicht denselben Verfasser hat, so glaube ich, daß es nichts desto weniger als zu diesem Werke gehörig angesehen, und auf deutschen Boden verpflanzt zu werden verdient. Die Worte Lacroix's mögen mich der ihm gebührenden Anpreisung überheben.

„Wenn man anders, sagt er *), um mit mei-
„nem Werke vertraut zu werden, eines Commentars
„bedürfen sollte, so würde ich das Werk von Puis-
„sant vorschlagen. Dieser geschickte Professor,
„der mit ausgezeichneten Talenten Wohlanständig-
„keit verbindet, hat sein Werk mit elegant aufge-
„lösten Aufgaben angefüllt, welche den Zöglingen,

*) Dessen Vorrede zur Trigonometrie und höhern Geometrie.

„die sich üben wollen, von großem Nutzen seyn kön„nen."

In der That biethet dem denkenden mit Lacroix's Werke vertrauten Leser, die Auflösung jeder einzelnen Aufgabe ein neues Feld von Erweiterungen dar, indem bey jeder derselben der Nutzen der analytischen Methode vor Augen gelegt wird, und dadurch leicht abgenommen werden kann, wie man sich bey jeder andern Aufgabe zu verhalten habe.

Wenn ich aber von der Gemeinnützigkeit dieses Werks rede, so will ich doch keineswegs dem kürzlich unter fast gleichem Titel aber in verschiedener Absicht von Meyer Hirsch aufgesetzten Werke seinen innern Werth und seine allgemeine Brauchbarkeit absprechen. Dieser talentvolle Mann hat sich in der That durch sein angefangenes Unternehmen verdient gemacht, und jeder, dem die Ausbreitung und Erweiterung der Mathematik am Herzen liegt,

wird gewiß mit mir den Wunsch hegen, daß es ihm gelingen möge, seine ferneren Arbeiten eben so planmäßig und durchdacht auszuführen.

Ich schließe mit dem Wunsche, daß diese Schriften in Deutschland eben den Nutzen verbreiten mögen, als sie schon in Frankreich gethan.

Berlin im May 1806.

Hahn.

Vorbericht.

Nachdem der Verfasser des neuen Lehrbegriffs der Differential- und Integralrechnung die Anwendung der Algebra auf die Geometrie unter einer rein analytischen Form dargestellt hat, glaubte ich, daß es jungen Meßkünstlern angenehm seyn wird, über diesen Gegenstand einige Auseinandersetzungen gegeben zu haben, welche in einem, gänzlich der Theorie gewidmeten Werke, keinen Platz finden konnten. Ich habe daher eine Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen der Geometrie aufgesetzt, deren Auflösungen oder deren Beweise unmittelbar von den in den **Anfangsgründen der Anwendung der Algebra auf die Geometrie und der höhern Geometrie von Lacroix** auf einer sehr lichtvollen Art auseinander gesetzten Prinzipien abhängen. Wahr ist es, daß manche der Aufgaben, welche den Gegenstand meiner Arbeit ausmachen, nicht allgemein brauchbar sind; da indessen einige derselben vormals sehr berühmt waren, und andre

wenig bekannt sind, so kann es nicht fehlen, daß sie die Neugierde der Leser reitzen, und selbst ihren Verstand schärfen. Ich habe besonders gestrebt nie meine Rechnungen auf geometrische Constructionen zu gründen, welche nicht wesentlich aus der Natur der Sätze hergeleitet werden können, um den Nutzen der Algebra desto mehr hervorstechen zu lassen; und hiervon kann man sich überzeugen, wenn man das von mir gebrauchte einfache Verfahren mit den verschiedenen synthetischen Mitteln vergleicht, deren man sich bisher bey der Auflösung der Aufgaben bedient hat. „Es giebt, sagt Lacroix, eine Art, die „Geometrie zu berücksichtigen, welche man die ana„lytische Geometrie nennen könnte, und welche „darin bestehen würde, die Eigenschaften der Aus„dehnung aus der möglichst kleinsten Anzahl von „Prinzipien, und durch wirklich analytische Metho„den herzuleiten." Wirklich streben auch auch alle Betrachtungen dieses gelehrten Verfassers nach diesem Zwecke. Wenn ich auch zu der von ihm auseinandergesetzten Theorie nichts neues hinzugefügt, so habe ich wenigstens getrachtet, die Kenntniß derselben durch ausgesuchte Anwendungen zu verbreiten.

Inhalt.

Erster Abschnitt.

Von der analytischen Trigonometrie.

Seite

Fundamentalgleichungen, aus denen die Auflösung aller Aufgaben der ebnen Trigonometrie hergeleitet werden — — — — — — 1

Grundregel der Auflösung der rechtwinklichten Dreyecke 2

Formeln, welche mit den verschiedenen Fällen der schiefwinklichten Dreyecke übereinkommen — — 4

Von den verschiedenen Veränderungen, welche die Gleichungen der geraden Linie und der Curven der zweyten Ordnung erleiden, wenn man die Axen der Coordinaten berücksichtigt, auf welche diese Linien zurückgeführt werden können.

Die Lage einer geraden gegen die Axen der Coordinaten hängt von den Zeichen und dem Werthe der bebeständigen Coefficienten ab, welche in ihrer Gleichung vorkommen — — — — — 9

Gleichung einer Geraden, welche unterworfen ist, durch einen gegebenen Punct zu gehen — — — 9

Seite

Gleichungen der einander parallelen Geraden — 10

Bedingung, welche erforderlich ist, damit zwey Gerade auf einander senkrecht seyen — — — — 10

Ausdruck für die Länge der von einem gegebenen Puncte auf eine bekannte Gerade gefällten senkrechten — 10

Jede zwey sich schneidende Linien haben in ihren gemeinschaftlichen Durchschnittspuncte dieselben Coordinaten 10

Ausdrücke der Sinus, Cosinus und Tangenten des von zweyen Geraden, deren Gleichungen bekannt sind, gebildeten Winkels — — — — — 10

Allgemeine und besondre Gleichungen des Kreises für rechtwinklichte Coordinaten — — — — 11

Allgemeine und besondre Gleichungen der Curven der zweyten Ordnung — — — — — — 12

Allgemeine Methode, den Curven Tangenten zu führen.

Aufgabe Wenn ein Punct gegeben ist, die Gleichung der Geraden zu finden, welche durch diesen Punct geht, und welche unterworfen ist, eine der Art und Lage nach in einer Ebne gegebene Curve zu berühren — — 13

Gleichung der Tangente der Parabel — — 14

Gleichungen der Tangenten bey der Ellipse und beym Kreise, wenn die Abcissen vom Mittelpuncte aus gerechnet werden — — — — — — — 16

Gleichungen der Tangente eines Kegelschnitts, wenn der Punct, durch welchen diese Tangente gehen soll, auf der Curve gegeben ist — — — — — 17

Seite

Die Gleichung der Tangenten in Rücksicht auf die Durchmesser der Curven der zweyten Ordnung ist von derselben Form, wie die in Rücksicht der Axen — 18

Zweyter Abschnitt.

Von den bestimmten Aufgaben und einigen Lehrsätzen der Geometrie.

Aufgabe Die Beziehung zu finden, welche zwischen der vom Scheitel eines Dreyecks nach der Mitte der Basis geführten Geraden, und den drey Seiten dieses Dreyecks anzutreffen ist — — — — — — 19

Aufgabe Wenn die aus den Winkeln eines Dreyecks nach der Mitte der gegenüberstehenden Seiten gezogenen drey Linien gegeben sind, den analytischen Ausdruck dieser Seiten zu finden — — — — — 22

Lehrsatz. Wenn man aus den Scheiteln der Winkel irgend eines geradlinigten Dreyecks auf die gegenüberstehenden Seiten senkrechte Linien fällt, so werden sich alle diese drey senkrechte in einem und demselben Puncte schneiden — — — — — — 23

Lehrsatz. Wenn man aus der Mitte einer jeden Seite eines Dreyecks nach den Scheiteln der gegenüberstehenden Winkel gerade Linien zieht, so werden diese Geraden einander in einem und demselben Puncte schneiden 24

Dieser Lehrsatz ist nur ein besondrer Fall eines weit allgemeinern Satzes, der noch nirgends angemerkt worden 26

Lehrsatz. In jedem ebnen Vierecke ist die Summe der

Seite

Quadrate der vier Seiten gleich der Summe der Quadrate der Diagonalen, nebst dem vierfachen Quadrate der Linie, welche die Mitten dieser Diagonalen verbindet 27

Lehrsatz. Wenn zwey Vierecke gleiche Diagonalen haben, und mit einander einerley Winkel einschließen, auf welche Art sie auch einander schneiden mögen, so sind diese Vierecke einander gleich — — — — 29

Aufgabe. Wenn einer der spitzen Winkel eines rechtwinklichten Dreyecks gegeben ist, die Lage der Hypothenuse zu finden, so daß dieses Dreyeck einem gegebenen Quadrate gleich sey — — — — — 30

Aufgabe. Durch einen der Lage nach gegen einen bekannten Winkel gegebenen Punct, in diesem Winkel eine Gerade dergestalt zu legen, daß das erfolgende Dreyeck einem gegebenen Quadrate gleich sey — — 31

Construction der Formel in Beziehung auf diese Aufgabe 31

Aufgabe. Wenn ein Kreis von einem bekannten Halbmesser und eine Gerade der Lage nach gegen zwey feste Axen gegeben sind, dem Kreis eine Tangente zu führen, welche zugleich der gegebenen Geraden parallel sey 32

Geometrische Construction, auf welche die Auflösung dieser Aufgabe führt — — — — — 34

Aufgabe. Zweyen der Größe und Lage nach in einer Ebne gegebenen Kreisen eine gemeinschaftliche Tangente zu führen — — — — — — 37

Aufgabe. Wenn zwey Kreise der Größe und Lage nach gegeben sind, durch dieselde eine Gerade dergestallt zu

Seite

ziehen, daß die dazwischen liegenden Theile einander, und einer gegebenen Linie gleich seyen — — 39

Geometrische Auflösung dieser Aufgabe — — 39

Analytischer Ausdruck einer in den Kreis durch den äußersten Punct des Durchmessers geführten Sehne — 39

Lehrsatz Wenn man durch den Berührungspunct zweyer gegebenen Kreise in den größern Kreis nach Belieben zwey Sehnen zieht, so werden diese vom Umkreise des kleinern Zirkels in proportionale Theile geschnitten 42

Dieser Lehrsatz führt auf die Auflösung einer Aufgabe, worin man sich vorlegt, einen Kreis zu beschreiben, welcher einen andern gegebenen Kreis berühre, und durch zwey gegebene Puncte gehe — — — 43

Aufgabe. Wenn ein Kreis der Größe und Lage nach in einem bekannten Winkel gegeben ist, den Mittelpunct eines Kreises zu finden, welcher die Schenkel des gegebenen Winkels und den gegebenen Kreis zugleich berühre — — — — — — — 43

Auflösung dieser Aufgabe durch Construction — 44

Aufgabe. Ein Trapezium durch eine beyden Grundlinien parallele Linie zu halbiren — — — — 45

Aufgabe. Ein schiefwinklichtes Dreyeck durch zwey einander unter rechten Winkeln schneidende Linien in vier gleiche Theile zu theilen — — — — 47

Auflösung dieser Aufgabe durch Construction — 48

Lehrsatz Wenn drey ungleiche Kreise der Größe und Lage nach in einer Ebne gegeben sind, so werden, wenn man

Seite

je zweyen und zweyen derselben außerhalb liegende gemeinschaftliche Tangenten führt, die drey auf diese Art erhaltenen Durchschnittspuncte in einerley geraden Linie liegen — — — — — — 50

Neue Folgerungen, welche man aus dem Beweis dieses Satzes ziehen kann — — — — — 51

Lehrsatz. Wenn man aus einer beliebigen Anzahl Puncten einer der Lage nach gegen eine bekannte Curve gegebenen Geraden, dieser Curve paarweise Tangenten führt, so werden alle Linien, welche die Berührungspuncte jedes Paars dieser Tangenten verbinden, alle einander in einem und demselben Puncte schneiden, und umgekehrt — — — — — — 57

Aufgabe. Wenn zwey Puncte der Lage nach gegen einen bekannten Kreis gegeben sind, auf dem Umkreise einen Punct von der Beschaffenheit zu finden, daß wenn man von demselben nach dem Mittelpuncte und nach den gegebenen Puncten gerade Linien zieht, der Halbmesser mit den beyden andern Geraden Winkel bilde, deren Sinus ein gegebenes Verhältniß zu einander haben — — — — — — — 62

Indirectes aber sehr einfaches Mittel, die geometrische Auflösung der vorhergehenden Aufgabe zu erhalten 62

Aufgabe. Wenn ein Punct der Lage nach in einem bekannten Winkel gegeben ist, die Coordinaten des Mittelpunctes eines Kreises zu finden, welcher einen Schenkel dieses Winkels berührt, und den der andere Schen-

kel dergestalt schneidet, daß der im Kreise liegende Theil eine gegebene Größe habe — — — — 65

Dritter Abschnitt.

Von den unbestimmten Aufgaben.

Aufgabe Eine Gerade und ein Punct außerhalb dieser Geraden sind gegen die rechtwinklichten Axen gegeben; man soll so viele Puncte als man will der Geraden finden, welche unterworfen ist durch den gegebenen Punct zu gehen, und mit der gegebenen Linie einen bekannten Winkel einzuschließen — — — — — 71

Aufgabe Wenn ein Winkel gegeben ist, einen Punct zu finden, von welchem auf die Schenkel dieses Winkels senkrechte Linien gefällt, diese zu einander das Verhältniß von m : n haben — — — — 72

Geometrische Auflösung dieser Aufgabe, und Folgerung, die man daraus zieht, um die Lage eines Punctes zu finden, von welchem auf drey gegebene Linien senkrechte gefällt, diese senkrechte zu einander ein bekanntes Verhältniß haben — — — — — — 72

Aufgabe. Wenn so viele Puncte als man will auf einer Ebne gegeben sind, dazwischen eine Linie dergestalt durchzuziehen, daß wenn man von diesen Puncten auf diese Linie senkrechte fällt, die Summe der senkrechten auf der einen Seite der der senkrechten auf der andern gleich sey — — — — — — — 75

Aufgabe. Wenn so viele Puncte als man will gegeben

Seite

sind, einen andern von der Beschaffenheit zu finden, daß wenn man nach jedem der andern eine gerade Linie zieht, die Summe der Quadrate dieser Linien einem gegebenen Quadrate gleich sey — — — — — 77

Aufgabe. Wenn ein Punct gegen zwey auf einander senkrechte Axen gegeben ist, den Lauf der Mittelpuncte aller Kreise zu bestimmen, welche unterworfen sind durch diesen Punct zu gehen und eine der Axen zu berühren 79

Aufgabe. Wenn eine Gerade der Lage nach gegen einen Kreis gegeben ist, den Lauf der Mittelpunkte aller Kreise zu finden, welche zugleich den Kreis und die gegebene Gerade berühren — — — — — 80

Aufgabe. Durch zwey gegebene Puncte zwey auf einander senkrechte Linien zu führen — — — 81

Aufgabe. Durch zwey gegebene Puncte zwey Gerade zu führen, welche mit einander einen bekannten Winkel einschließen — — — — — — 83

Construction der unbestimmten Gleichung, welche aus der Auflösung dieser Aufgabe erfolgt — — — 83

Aufgabe. Wenn zwey Kreise der Größe und Lage nach auf einer Ebne gegeben sind, den Lauf der Mittelpuncte aller Kreise zu finden, welche die beyden gegebenen Kreise zugleich berühren — — — — — 88

Aufgabe. Die Natur der Curve zu bestimmen, welche alle Puncte enthält, von denen einer gegebenen Parabel zwey Tangenten geführt, diese Tangenten einen gegebenen Winkel einschließen — — — 89

Seite

Aufgabe. Einen Punct zu finden, von welchem, auf die Schenkel eines gegebenen Winkels senkrechte Linien gefällt, das hierdurch gebildete Viereck einem gegebenen Quadrate gleich sey — — — — — 93

Aufgabe. Zwey Kreise sind der Größe und Lage nach gegeben; durch irgend einen Punct des einen habe man eine unbegränzte Tangente geführt, welche den andern in zwey Puncte schneidet, aus welchen jenem Tangenten geführt seyen; man verlangt die Natur der Curve, auf welcher alle Durchschnittspuncte liegen — 96

Aufgabe. Eine Ellipse in ein Dreyeck dergestalt einzuschreiben, daß ein Durchmesser derselben auf der Linie liege, welche durch den Scheitelpunct und der Mitte der Basis geht — — — — — — 99

Bedingung, welche die Aufgabe auf eine einzige Auflösung einschränkt — — — — — 100

Aufgabe. Eine Curve der zweyten Ordnung zu beschreiben, welche durch einen gegebenen Punct geht, und welche die Seiten eines Winkels in zwey gegebenen Puncten berührt — — — — — 103

Aufgabe. Wenn die beyden zugeordneten Durchmesser einer Ellipse nebst dem von ihnen eingeschlossenen Winkel gegeben sind, die beyden Halbaxen zu finden 107

Auflösung dieser Aufgabe durch eine geometrische Construction — — — — — — 107

Aufgabe. Die Gleichung einer Curve von der Beschaffenheit zu finden, daß wenn man von einem der Lage

Seite

nach gegen eine Linie gegebenen festen Punct nach allen ihren Puncten gerade Linien zieht, jeder der Theile dieser Linien von einer gegebenen Größe sey — 109

Die Curve, auf welche diese Gleichung führt, wird die Conchoide, Muschellinie, genannt — — — 110

Aufgabe. Die Gleichung der Cissoide zu finden — 110

Aufgabe, woraus die Theorie des Pantographs hergeleitet wird — — — — — — 112

Neues Mittel, eine Ellipse durch eine stetige Bewegung zu beschreiben — — — — — — 117

Aufgabe. Eine Curve durch mehrere gegebene Puncte zu führen — — — — — — — 119

Aus der Auflösung dieser Aufgabe erfolgt eine Interpolationsmethode — — — — — — 125

Weitere

Weitere Ausführung der Trigonometrie und höhern Geometrie.

Erster Abschnitt.

Von der analytischen Trigonometrie.

§. 1.

Wer die Anfangsgründe der Trigonometrie von Lacroix oder die von Legendre mit Aufmerksamkeit gelesen hat, der kann keine Schwierigkeiten finden, auf dem analytischen Wege die bekannten Formeln zur Auflösung der rechtwinklichten Dreyecke zu erhalten, so wie diese beyden Geometer bey den sphärischen Dreyecken gethan haben. Wir wollen indessen nichts desto weniger die drey Fundamentalgleichungen, welche die zwischen den Seiten und Winkeln eines Dreyecks anzutreffenden Beziehungen ausdrücken, wieder vornehmen und daraus verschiedene nützliche Resultate herleiten, von denen einige in der Folge ihre Anwendung finden werden. Diese drey Gleichungen sind

$$\left.\begin{array}{l} c^2 + c'^2 - 2cc' \cos\gamma'' = c''^2 \\ c^2 + c''^2 - 2cc'' \cos\gamma' = c'^2 \\ c'^2 + c''^2 - 2c'c'' \cos\gamma = c^2 \end{array}\right\} (A).$$

wenn man die drey Seiten eines geradlinigten Dreyecks durch c, c', c'', und die diesen Seiten gegenüber stehenden Winkel durch γ, γ', γ'' bezeichnet *).

Nimmt man die erste und zweyte dieser Gleichungen, dann die erste und dritte und endlich die zweyte und dritte zusammen, so werden diese drey Summen respectiv durch $2c$, $2c'$, $2c''$ theilbar seyn, und man wird zu Quotienten die drey einfachen Gleichungen vom ersten Grade haben:

$$\left.\begin{array}{l} c - c' \cos\gamma'' - c'' \cos\gamma' = 0 \\ c' - c \cos\gamma'' - c'' \cos\gamma = 0 \\ c'' - c \cos\gamma' - c' \cos\gamma = 0 \end{array}\right\} (B).$$

Es ist klar, daß man im Allgemeinen, wenn drey Stücke eines Dreyecks gegeben sind, die drey andern bestimmen kann, weil zwischen diesen eine gleiche Anzahl Gleichungen vorhanden ist. Wenn man indessen aus den drey Winkeln eines Dreyecks die drey Seiten bestimmen wollte, so würde das Resultat der Elimination, so wie die geometrischen Betrachtungen lehren, daß die Aufgabe unbestimmt ist.

§. 2.

Wenn das vorgelegte Dreyeck rechtwinklicht ist, so werden die Gleichungen (B) an und für sich viel ein-

*) Man siehe die Anwendungen der Algebra auf die Geometrie von Lacroix §. 79.

facher. Denn wenn γ'' dem Quadranten oder der Einheit gleich ist, in welchem Falle $\cos\gamma'' = 0$, so hat man

$$\left.\begin{array}{l} c - c''\cos\gamma' = 0 \\ c' - c''\cos\gamma = 0 \\ c'' - c\cos\gamma' = c'\cos\gamma \end{array}\right\} (C).$$

Da nun unter diesen Umständen $\cos\gamma' = \sin\gamma$, so verwandelt sich die erste dieser Gleichungen in folgende

$$c - c''\sin\gamma = 0,$$

woraus man zieht

$$\sin\gamma = \frac{c}{c''}.$$

Aus eben dem Grunde verwandelt sich die zweyte Gleichung in

$$c' - c''\sin\gamma' = 0,$$

und giebt

$$\sin\gamma' = \frac{c'}{c''}.$$

Hieraus folgt, daß in einem rechtwinklichten Dreyecke der Sinus eines der spitzen Winkel gleich ist, der diesem Winkel entgegenstehenden Seite dividirt durch die Hypothenuse.

Da $\sin\gamma = \frac{c}{c''}$, und $\cos\gamma = \frac{c'}{c''}$, so erhält man wenn der erste Ausdruck durch den zweyten dividirt wird

$$\frac{\sin\gamma}{\cos\gamma} = \frac{c}{c'} = \text{tang}\,\gamma.$$

Eben so folgt

$$\frac{\sin\gamma'}{\cos\gamma'} = \frac{c'}{c} = \text{tang}\,\gamma'.$$

Es ist demnach die Tangente eines der spitzen Winkel im rechtwinklichten Dreyecke gleich der diesem Winkel entgegenstehenden Cathete dividirt durch die andre Cathete.

§. 3.

Aus der ersten der Gleichungen (C) hat man unmittelbar

$$c'' = \frac{c}{\cos \gamma'},$$

und aus der zweyten Gleichung hat man

$$c'' = \frac{c'}{\cos \gamma}.$$

Diese beyden Ausdrücke für eine und dieselbe Größe führen auf folgende Proportion

$$\sin \gamma : \sin \gamma' = c : c',$$

wenn man die Cosinus in Sinus verwandelt.

Es verhalten sich daher im rechtwinklichten Dreyecke die Sinus der spitzen Winkel wie die diesen Winkeln gebenüber stehenden Seiten.

§. 4.

Um die Formeln zu finden, welche mit den verschiedenen Fällen der schiefwinklichten Dreyecke übereinstimmen, ziehe man aus der dritten Gleichung (A),

$$\cos \gamma = \frac{c^2 - c'^2 - c''^2}{-2c'c''},$$

und substituirt man diesen Werth in die Gleichung

$$\sin \gamma^2 = 1 - \cos \gamma^2,$$

so kommt, wenn die Operationen auf eine angemessene Art verrichtet werden,

$$\sin\gamma^2 = \frac{2c'^2c''^2 + 2c^2c''^2 + 2c^2c'^2 - c^4 - c'^4 - c''^4}{4c'^2c''^2},$$

woraus man zieht

$$\sin\gamma = \frac{\sqrt{(2c'^2c''^2 + 2c^2c''^2 + 2c^2c'^2 - c^4 - c'^4 - c''^4)}}{2c'c''}.$$

Multiplicirt man den Zähler und Nenner des zweyten Theils durch c, so erhält man

$$\sin\gamma = c \times \frac{\sqrt{(2c'^2c''^2 + 2c^2c''^2 + 2c^2c'^2 - c^4 - c'^4 - c''^4)}}{2cc'c''},$$

und bezeichnet man den die Größe c multiplicirenden Bruch durch M, so wird man haben

$$\sin\gamma = cM;$$

da nun die Größe M eine symetrische Function von den Seiten des Dreyecks ist, so kann man eben so schließen

$$\sin\gamma' = c'M, \quad \sin\gamma'' = c''M.$$

Mithin

$$\sin\gamma' : \sin\gamma'' = c' : c''$$

oder

$$\sin\gamma' c'' = \sin\gamma'' c'.$$

Es verhalten sich daher in jedem Dreyecke die Sinus der Winkel wie die diesen Winkeln gegenüber stehenden Seiten.

§. 5.

Da $\sin\gamma' c = \sin\gamma c'$, und $\sin\gamma' c'' = \sin\gamma'' c'$, so erhält man, wenn diese Gleichungen Glied für Glied zusammengenommen oder von einander abgezogen werden,

$$(c + c'')\sin\gamma' = c'(\sin\gamma + \sin\gamma'')$$
$$(c - c'')\sin\gamma' = c'(\sin\gamma - \sin\gamma''),$$

woraus man zieht, wenn das erste Resultat durch das andre dividirt wird

$$\frac{c + c''}{c - c''} = \frac{\sin\gamma + \sin\gamma''}{\sin\gamma - \sin\gamma''}.$$

Nun ist nach der Theorie von den Kreisfunctionen

$$\frac{\sin\gamma + \sin\gamma''}{\sin\gamma - \sin\gamma''} = \frac{\tang\left(\frac{\gamma + \gamma''}{2}\right)}{\tang\left(\frac{\gamma - \gamma''}{2}\right)};$$

mithin wird man haben

$$c + c'' : c - c'' = \tang\left(\frac{\gamma + \gamma''}{2}\right) : \tang\left(\frac{\gamma - \gamma''}{2}\right) \text{*)}.$$

Diese Proportion bezieht sich auf den Fall, wo zwey Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel eines Dreyecks bekannt sind.

§. 6.

Wenn man in der Gleichung

$$\cos\gamma = \frac{c''^2 + c'^2 - c^2}{2c'c''}$$

statt $\cos\gamma$ dessen Werth $1 - 2\sin^2\frac{1}{2}\gamma$ setzt, so erhält man, wenn die Zeichen aller Glieder geändert werden, und im ersten Theile nur $\sin^2\frac{1}{2}\gamma$ beybehalten wird, die Gleichung

---

*) Es ist beyläufig zu merken, daß man dieses Resultat weit leichter finden würde, wenn man zu den Eigenschaften der Proportionen seine Zuflucht nehmen wollte. Denn aus $\sin\gamma : \sin\gamma'' = c : c''$ hat man unmittelbar $\sin\gamma + \sin\gamma'' : \sin\gamma - \sin\gamma'' = c + c'' : c - c''$; allein es war unsre Absicht einen mehr analytischen Weg einzuschlagen.

$$\sin^2 \tfrac{1}{2}\gamma = \frac{2c'c'' - c''^2 - c'^2 + c^2}{4c'c''}.$$

Da der Zähler des zweyten Theils in zwey Factoren zerlegt werden kann, so kann diese Gleichung folgende Form erhalten

$$\sin^2 \tfrac{1}{2}\gamma = \frac{\left(\frac{c + c' - c''}{2}\right)\left(\frac{c - c' + c''}{2}\right)}{c'c''};$$

Da aber $\frac{c + c' - c''}{2} = \frac{c + c' + c''}{2} - c''$, und $\frac{c + c'' - c'}{2} = \frac{c + c'' + c'}{2} - c'$, so erhält man, wenn $c + c' + c''$ durch $\mathfrak{f}$ bezeichnet, und aus beyden Theilen die Quadratwurzel gezogen wird

$$\sin \tfrac{1}{2}\gamma = \sqrt{\left\{\frac{\left(\frac{\mathfrak{f}}{2} - c'\right)\left(\frac{\mathfrak{f}}{2} - c''\right)}{c'c''}\right\}},$$

eine Formel, die sehr leicht dem logarithmischen Calcul unterworfen werden kann, und welche sehr genau den Winkel eines Dreyecks giebt, wenn seine drey Seiten bekannt sind.

Von den verschiedenen Veränderungen, welche die Gleichungen der geraden Linie und der Curven vom zweyten Grade in Rücksicht der Axen der Coordinaten erleiden, auf welche diese Linien zurückgeführt werden können.

Da die folgenden Bemerkungen eigentlich nur eine Recapitulation der vorzüglichsten analytischen Resultate

des Verfassers sind, dessen Methode wir anwenden, so verweisen wir in Ansehung der weitern Auseinandersetzungen, die man in dieser Rücksicht wünschen könnte, auf dessen Werk; und wir zeigen ein für alle Mahl an, daß, um nicht das gesagte zu wiederholen, den Paragraphen, die sich auf dessen Lehrbegriff der Anwendung der Algebra auf die Geometrie beziehen, bloß die beyden Buchstaben L. C beygefügt sind.

§. 7.

Eine durch den Anfangspunct der rechtwinklichten Coordinaten gehende Gerade hat zur Gleichung

$$y = ax,$$

wo a die trigonometrische Tangente des von dieser Geraden und der Axe der Abcissen gebildeten Winkels ist.

Die Gleichung einer Geraden, welche nicht durch den Anfangspunkt geht, ist allgemein durch

Fig. 1. $$y = Ax + B$$

vorgestellt, wo die völlig bekannte Größe B der Ausdruck der mit $x = 0$ correspondirenden Ordinate ist.

Wenn der Lauf einer Geraden durch die besondere Gleichung

$$y = ax - b$$

dargestellt ist, so ist dies der Fall, den Fig. 2. vorstellt.

Ist er durch die Gleichung

$$y = -ax + b$$

ausgedrückt, so ist dies der Fall der Fig. 3.

Wenn er es aber durch die Gleichung

$$y = -ax - b$$

ist, so stellt diesen Fall Fig. 4. dar.

§. 8.

Die Gleichung einer der Axe der Ordinaten parallelen Geraden ist

$$x = a.$$

Eben so ist die Gleichung einer der Axe der Abcissen parallelen Geraden

$$y = b.$$

§. 9.

Eine Gerade, welche unterworfen ist durch einen Punct zu gehen, dessen Coordinaten α, β sind, und welche mit der Axe der Abcissen einen Winkel macht, dessen Tangente a ist, hat zur Gleichung

$$y - \beta = a(x - \alpha).$$

§. 10.

Zwey gerade Linien sind einander parallel, wenn ihre Gleichungen respectiv sind

$$y = ax + b, \quad y = ax + b'.$$

§. 11.

Zwey durch die Gleichungen

$$y = ax + b, \quad y = a'x + b'$$

dargestellte Gerade sind auf einander senkrecht, wenn die Gleichung $aa' + 1 = 0$ statt findet, das heißt, wenn a' mit einem entgegengesetzten Zeichen die Cotangente des Winkels ist, dessen Tangente a ist.

§. 12.

Wenn die Gleichung einer Geraden

$$y = ax + b$$

ist, so wird die Länge der von einem Punct, dessen positive Coordinaten α, β sind, auf diese Linie gefällten senkrechten durch

$$\pm \frac{\beta - a\alpha - b}{\sqrt{(1 + a^2)}}$$

ausgedrückt seyn, wo das obere Zeichen in dem Falle genommen wird, wo die Gerade zwischen dem gegebenen Punct und der Axe der Abcissen liegt, und das untere Zeichen in dem Falle statt findet, wo der gegebene Punct zwischen der Geraden und der Axe der Abcissen liegt.

§. 13.

Zwey sich schneidende gerade oder krumme Linien haben in ihren Durchschnittspuncten dieselben Coordinaten.

§. 14.

Wenn die Gleichungen zweyer sich schneidenden Geraden

$$y = ax + b, \quad y = a'x + b'$$

sind, so ist der Cosinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels

$$\frac{1 + aa'}{\sqrt{(1 + a^2)(1 + a'^2)}},$$

der Sinus eben dieses Winkels ist

$$\frac{a' - a}{\sqrt{(1 + a^2)}\sqrt{(1 + a'^2)}};$$

und dessen Tangente ist

$$\frac{a' - a}{1 + aa'};$$

wo der Halbmesser der Tafeln der Einheit gleich gesetzt wird.

Wenn aber a negativ ist, so verwandelt sich dieser letztere Ausdruck in

$$\frac{a + a'}{1 - aa'}.$$

Im ersten Falle ist der Winkel, von dem die Rede ist, die Differenz der Winkel, deren Tangenten a, a' sind; und im zweyten Falle ist er deren Summe.

§. 15.

Die allgemeinste Gleichung des Kreises für rechtwinklichte Coordinaten ist

$$(y - \beta)^2 + (x - \alpha)^2 = r^2,$$

wo α und β die Coordinaten des Mittelpunctes sind, und r der Halbmesser.

Wenn der Anfangspunct auf den äußersten Punct des Durchmessers verlegt wird, wird diese Gleichung

$$y^2 = 2rx - x^2,$$

und wenn der Anfangspunct im Mittelpuncte liegt, hat man bloß

$$y^2 + x^2 = r^2.$$

§. 16.

Die allgemeine Gleichung der Curven der zweyten Ordnung ist durch die des zweyten Grades mit zweyen veränderlichen Größen

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex = F \ldots (1)$$

ausgedrückt. Der Anfangspunct der rechtwinklichten Coordinaten mag auf irgend eine Art in der Ebne der Curve liegen. Um die Art der Curve kennen zu lernen, zu welcher diese Gleichung gehört, wenn die Coefficien-

ten A, B, C ꝛc. besondre Werthe erhalten, hat man bloß auf die drey ersten Rücksicht zu nehmen (§. 115 und folgende. L. C.). So zum Beyspiel gehört die vorgelegte Gleichung zur Ellipse, zur Parabel oder zur Hyperbel, je nachdem 4AC größer, gleich oder kleiner als B^2 ist. Allein durch die Veränderung der Axen ist es möglich diese allgemeine Gleichung sehr zu vereinfachen. In der That kann man sie auf die Form

$$\alpha u^2 + \beta t^2 = \gamma \quad . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

zurückführen, wenn der Anfangspunct der Coordinaten in den Mittelpunct der Curve verlegt wird.

Oder sie wird

$$\alpha u^2 + \beta t^2 - \varepsilon t = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

wenn derselbe Anfangspunct auf einen Punct der Curve verlegt wird.

Die Gleichung (2), welche bloß zur Ellipse oder zur Hyperbel gehört, je nachdem α und β einerley Zeichen haben oder nicht, wird

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$$

und

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2),$$

wo a und b die Halbaxen dieser Curven angeben.

Bey eben dieser Annahme verwandelt sich die Gleichung (3), welche die drey Curven der zweyten Ordnung in sich faßt, für die Ellipse in

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2),$$

und für die Hyperbel in

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - 2ax).$$

Wir werden die Buchstaben a und b accentuiren, wenn wir mit den Gleichungen in Beziehung auf die conjugirten Durchmesser zu thun haben werden.

Endlich ist die Gleichung der Parabel, welche in der Gleichung (3) mit dem Fall übereinstimmt, wo $\beta = o$

$$y^2 = px,$$

wo p für den Parameter genommen ist.

Allgemeine Methode, den Curven Tangenten zu führen.

Aufgabe.

§. 17.

Wenn ein Punct gegeben ist, die Gleichung der Geraden zu finden, welche durch diesen Punct geht, und welche unterworfen ist, eine der Art und der Lage nach in einer Ebne gegebene Curve zu berühren.

Auflösung.

Um den allgemeinsten Fall zu behandeln, wollen wir die Gleichung der Curven von der zweyten Ordnung

$$y'^2 = mx' + nx'^2$$

betrachten, welche statt findet, wenn die rechtwinklichten Axen AX, AY Fig. 5. ihren Anfangspunct im Scheitel der Curve haben, und wir wollen die positiven Coordinaten des gegebenen Punctes m Fig. 5. durch α, β bezeichnen. Die Gleichung der gesuchten Geraden wird folglich seyn

$$y - \beta = A(x - \alpha).$$

Dieses vorausgesetzt wird, wenn man durch den Berührungspunct M, dessen Coordinaten x', y' sind, die Secante SM′ führt, diese Secante nur dann mit der Tangente TM zusammen fallen, wenn die Sehne MM′ verschwindet, oder, welches einerley ist, in dem Augenblick, wo MQ und M′Q zugleich Null werden.

Bezeichnet man ferner die Coordinaten der Puncte der Curve in Rücksicht auf die neuen Axen MX′, MY′ durch x'' und y'', und substituirt man in die Gleichung der Curven der zweyten Ordnung $x'' + x'$ statt x' und $y'' + y'$ statt y', so wird man eine andre Gleichung in Beziehung auf diese Axen erhalten. In der That hat man

$$(y'' + y')^2 = m(x'' + x') + n(x'' + x')^2,$$

und läßt man in der Entwickelung die Gleichung der vorgelegten Curve hinweg, so wird der Rest seyn

$$y''^2 + 2y''y' = nx''^2 + 2nx''x' + mx'',$$

welchem man diese Form geben kann

$$y''(y'' + 2y') = x''(nx'' + 2nx' + m),$$

woraus man zieht

$$\frac{x''}{y''} = \frac{y'' + 2y'}{nx'' + 2nx' + m}.$$

Andrerseits wird, da die Linie SMM′ gerade ist, das Verhältniß der Coordinaten des Punctes M′ in Rücksicht auf den Anfangspunct M mit dem der Coordiaaten des Punctes M in Rücksicht auf den Anfangspunct S einerley seyn; das heißt

$$\frac{y''}{x''} = \frac{y'}{-PS'}$$

woraus folgt

$$PS = -\frac{x''}{y''}y'.$$

Setzt man nun in diesen Ausdruck statt $\frac{x''}{y''}$ den dafür oben gefundenen Werth, so erhält man

$$PS = -\frac{y'(y'' + 2y')}{nx'' + 2nx' + m};$$

aber PS verwandelt sich in PT wenn MM' Null wird, oder wenn $x'' = y'' = o$.

Es ist also

$$\text{Subtangente } PT = -\frac{2y'^2}{2nx' + m}.$$

Weil endlich

$$A = \frac{PM}{PT} = \frac{2nx' + m}{2y'},$$

so wird die Gleichung der Tangente TM

$$y - \beta = \frac{2nx' + m}{2y'}(x - \alpha) \quad (T).$$

Und da im Berührungspunct M die Tangente und die Curve einerley Coordinaten haben, welches sich analytisch dur $y = y'$ und $x = x'$ ausdrücken läßt, so wird die vorhergehende Gleichung diese Form annehmen

$$2y'^2 - 2\beta y' = 2nx'^2 + mx' - 2n\alpha x' - m\alpha;$$

setzt man zum zweyten Theile dieser Gleichung $mx' - mx'$ hinzu, so erhält man nach der Reduction, welche die Gleichung der Curven der zweyten Ordnung darbietet

$$-2\beta y' = -mx' - 2n\alpha x' - m\alpha,$$

woraus man zieht

$$y' = \frac{x'(2\alpha n + m) + m\alpha}{2\beta}.$$

§. 18.

Es sey zum Beyspiel die Parabel, deren Gleichung $y'^2 = px'$ ist. In diesem Falle hat man $m = p$ und $n = 0$; die Gleichung der Tangente dieser Curve wird also

$$y' = \frac{p(x' + \alpha)}{2\beta}.$$

Wenn der Punct, durch welchen die Tangente TM gehen muß, in dem Winkel YAT liegen möchte, so würde die Abcisse α negativ seyn, und man würde haben

$$y' = \frac{p(x' - \alpha)}{2\beta}.$$

§. 19.

Die Rechnungen in Beziehung auf die Gleichung

$$y'^2 = m'x'^2 + n, \quad \text{Fig. 6.}$$

welche der Ellipse und der Hyperbel gemein ist, wenn man ihre Mittelpuncte zum Anfangspunct der Abcissen nimmt, lassen sich genau auf dieselbe Art ausführen. Denn verwandelt man x in $x' + x''$ und y' in $y' + y''$, so wird die gegenwärtige Gleichung durch angemessene Entwickelungen und Reductionen

$$y''(y'' - 2y') = x''(m'x'' + 2m'x'),$$

woraus folgt, daß

$$\text{Subsecante PS} = \frac{y'(y'' - 2y)}{m(x'' + 2x')},$$

und daß

$$\text{Subtangente PT} = \frac{-2y'^2}{2m'x'} = -\frac{y'^2}{m'x'}.$$

Die

Die Gleichung der Tangente TM, für welche

$$A = -\frac{PM}{PT} = \frac{m'x'}{y'}$$

wird also diese Form annehmen

$$y - \beta = \frac{m'x'}{y'}(x - \alpha);$$

aber im Berührungspunct hat man $y = y'$, $x = x'$; die vorhergehende Gleichung verwandelt sich also in

$$y'^2 - \beta y' = m'x'^2 - m'\alpha x',$$

und setzt man von einerley Seite $n' - n'$ hinzu, so erhält man, nachdem alle Zeichen geändert und reducirt worden

$$y' = \frac{m'\alpha x' + n'}{\beta}.$$

§. 20.

Um diese Formel auf einen besondern Fall anzuwenden, sey $y'^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x'^2)$; alsdann hat man $m' = -\frac{b^2}{a^2}$, und $n' = b^2$; und die Substitution dieser Werthe in die Gleichung für die Tangente giebt

$$y' = \frac{a^2b^2 - b^2\alpha x'}{a^2\beta}.$$

§. 21.

Beym Kreise hat man $b = a$ oder $m' = -1$, und die Gleichung seiner Tangente wird

$$y' = \frac{a^2 - \alpha x'}{\beta} \text{ oder } \beta y' + \alpha x' = a^2.$$

Man findet auch, daß sich $A = \frac{m'x'}{y'}$ in $A = -\frac{x'}{y'}$ verwandelt.

§. 22.

Wenn der Punct m, durch welchen die Tangente geführt werden soll, auf der Curve selbst gegeben wäre, so würde man in diesem Puncte haben $\alpha = x'$, $\beta = y'$, und die Gleichung T würde werden

$$y - y' = \frac{(\frac{1}{2}m + nx')}{y'}(x - x').$$

Dieses ist die Gleichung der Tangente für alle Curven der zweyten Ordnung, wenn der gegebene Punct mit dem Berührungspuncte zusammenfällt. Dieses Resultat ist, wie man sich leicht überzeugen kann, mit dem des §. 146. der höhern Geometrie von Lacroix einerley; und man kann sich ferner überzeugen, daß unsre Methode, in welcher wir von der Uebertragung der Axen Gebrauch gemacht haben, mit derjenigen viel Aehnlichkeit hat, welche dieser Verfasser im ersten Bande seiner Differentialrechnung entwickelt hat.

§. 23.

Es ist wichtig zu bemerken, daß man noch zu Resultaten von derselben Form gelangen würde, wenn selbst die Axe der Ordinaten, welche immer eine Tangente der vorgelegten Curve ist, mit der Axe der Abcissen keinen rechten Winkel bildete. Der Grund hiervon liegt darin, daß die Eigenschaften der Curven der zweyten Ordnung, sowohl in Rücksicht ihrer Durchmesser als ihrer Axen, dieselben sind; nur darf in diesem Falle der

Coefficient von x in der allgemeinen Gleichung für die Tangente nicht als eine trigonometrische Tangente betrachtet werden; es ist im Gegentheil eine Gerade, welche durch den äußersten Punct einer beständigen als Einheit genommenen Abcisse, der Axe der Ordinaten parallel geführt ist.

Zweyter Abschnitt.

Von den bestimmten Aufgaben und einigen Lehrsätzen der Geometrie.

Wenn alle Bedingungen einer Aufgabe durch Gleichungen ausgedrückt sind, so finden sich die unbekannten darin nothwendigerweise durch die Beziehungen verbunden, welche sie zu den bekannten Größen haben. Alsdann giebt es so viele Gleichungen als Größen zu entdecken sind, die Aufgabe ist alsdann nur einer begränzten Anzahl Auflösungen fähig, und in dergleichen Fällen wird sie bestimmt genannt. Von dieser Art sind folgende Aufgaben.

Aufgabe.

§. 24.

Die zwischen der vom Scheitel eines Dreyecks nach der Mitte der Basis geführten Geraden, und den drey Seiten desselben anzutreffende Beziehung zu finden.

Es sey Fig. 7.

$$AB = c,\quad AM = c',\quad BM = c''$$
$$AP = x,\quad PM = y,\quad ME = z.$$

Auflösung.

Die rechtwinklichten Dreyecke APM, BPM biethen respectiv die Gleichungen dar

$$y^2 = c'^2 - x^2,\quad y^2 = c''^2 - (c - x)^2,$$

vermittelst deren man erhält

$$x = \frac{c^2 + c'^2 - c''^2}{2c};$$

$$y^2 = \frac{2c^2c'^2 + 2c^2c''^2 + 2c'^2c''^2 - c^4 - c'^4 - c''^4}{4c^2},$$

und folglich

$$BP = \frac{c^2 + c''^2 - c'^2}{2c}.$$

Wenn $c'' > c'$, so ist AP das kleinere Segment, und man hat

$$PE = AE - AP = \frac{c''^2 - c'^2}{2c};$$

da nun $EM^2 = PM^2 + PE^2$, so hat man, wenn die algebraischen Ausdrücke angebracht werden

$$z^2 = \frac{\left[\begin{array}{r} 2c^2c'^2 + 2c^2c''^2 + 2c'^2c''^2 - c^4 - c'^4 \\ - c''^4 + c'^4 - 2c'^2c''^2 + c''^4 \end{array}\right]}{4c^2};$$

schafft man den Nenner weg und reducirt, so kommt für die gesuchte Beziehung

$$4z^2 = 2c'^2 + 2c''^2 - c^2$$

oder wohl

$$2z^2 + 2a^2 = a'^2 + a''^2,$$

wenn man c in $2a$, c' in a, und c'' in a'' verwandelt.

Dieser Satz, welcher der vierzehnte des dritten Buchs der Geometrie von Legendre ist, könnte ohne Zweifel viel kürzer aufgelöst werden, wenn man, wie dieser gründliche Geometer gethan, von den Eigenschaften der schiefwinklichten Dreyecke ausginge; allein wir haben unter diesen Umständen vorgezogen auf die Fundamental-Eigenschaften des rechtwinklichten Dreyecks zurück zu gehen, um die möglichst kleinste Anzahl von Prinzipien zu gebrauchen.

Aufgabe.

§. 25.

Wenn Fig. 8. die drey Linien gegeben sind, welche von den Winkeln eines Dreyecks ausgehen und sich in der Mitte der gegenüber stehenden Seiten endigen, den analytischen Ausdruck dieser Seiten zu finden.

Es seyen

$$AB = 2c,\quad AC = 2c',\quad BC = 2c''$$
$$CD = d,\quad BF = d',\quad AE = d''.$$

Auflösung.

Nach der vorhergehenden Aufgabe wird man die drey Gleichungen haben

$$4c^2 + 4c'^2 = 2d''^2 + 2c''^2$$
$$4c^2 + 4c''^2 = 2d'^2 + 2c'^2$$
$$4c'^2 + 4c''^2 = 2d^2 + 2c^2$$

oder besser

$$2c^2 + 2c'^2 = d''^2 + c''^2$$
$$2c^2 + 2c''^2 = d'^2 + c'^2$$
$$2c'^2 + 2c''^2 = d^2 + c^2;$$

zieht man die zweyte von der ersten, dann die dritte von der ersten, und dann die dritte von der zweyten ab und reducirt sie, so erhält man diese drey andre Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} 3c'^2 - 3c''^2 = d''^2 - d'^2 \\ 3c^2 - 3c''^2 = d''^2 - d^2 \\ 3c^2 - 3c'^2 = d'^2 - d^2 \end{array}\right\} \text{(A)}.$$

Da jede dieser eine Function der beyden andern ist, so existiren im wesentlichen nur zwey Gleichungen zwischen den unbekannten c, c', c''; um nun eine dritte zu erhalten, indem man unmittelbar von diesen letztern ausgeht, erwäge man, daß, weil die Geraden AC, CB in den Puncten E, F halbirt sind, die Linie EF nothwendigerweise der Basis AB parallel, und der Hälfte derselben gleich seyn muß: man sieht überdieß, daß der Punct G sich zugleich auf der Mitte von EF und CD befindet. Das Dreyeck FCE ist also mit denselben Eigenschaften behaftet als das Dreyeck ACB; man hat folglich die verlangte Gleichung

$$c'^2 + c''^2 = \frac{c^2 + d^2}{2}.$$

dividirt man nun die erste der Gleichungen (A) durch 3, so erhält man diese

$$c'^2 - c''^2 = \frac{d''^2 - d'^2}{3},$$

welche mit der vorhergehenden Gleichung verbunden

$$c'^2 = \frac{3c^2 + 3d^2 - 2d'^2 + 2d''^2}{12}$$

$$c''^2 = \frac{3c^2 + 3d^2 - 2d''^2 + 2d'^2}{12}$$

giebt; wird der Werth von c'^2 in der dritten der Glei-

chungen (A) substituirt, so kann man nach den nöthigen Reductionen daraus herleiten

$$9c^2 = 2d'^2 + 2d''^2 - d^2,$$

und man sieht gleich, daß man auch hat

$$9c'^2 = 2d^2 + 2d''^2 - d'^2$$
$$9c''^2 = 2d^2 + 2d'^2 - d''^2;$$

dieses sind die Gleichungen, aus denen man die Werthe der Seiten des Dreyecks ziehen kann.

Lehrsatz.

§. 26.

Wenn man von den Scheiteln der Winkel irgend eines geradlinigten Dreyecks Fig. 9. auf die gegenüber stehenden Seiten senkrechte Linien fällt, so werden diese drey senkrechte sich alle in einem und demselben Puncte schneiden.

Es seyen

$$AP = \alpha,\quad PM = \beta \text{ und } AP' = \alpha',$$

so wird man haben

$$PP' = \alpha' - \alpha.$$

Beweis.

1) Da die Gleichung der durch den Anfangspunct der rechtwinklichten Coordinaten gehenden Geraden AM, $y = \frac{\beta}{\alpha} x$ ist, so wird die der darauf senkrechten und durch den Punct P' gehenden Geraden P'M'' seyn (§. 9. und 11.)

$$y = -\frac{\alpha}{\beta}(x - \alpha') \ldots\ldots\ldots (1).$$

2) Da die Gerade P'M mit der Axe der Abcissen einen Winkel einschließt, dessen trigonometrische Tangente $-\frac{\beta}{\alpha' - \alpha}$ ist, so wird die Linie AM', welche auf dieser Geraden senkrecht ist seyn

$$y = \frac{\alpha' - \alpha}{\beta} x \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2).$$

Dieses vorausgesetzt, werden die veränderlichen Größen x, y, wenn man ihnen dieselben Werthe als in den Gleichungen (1) und (2) beylegt, die Coordinaten des Durchschnittspunctes m der Geraden AM', P'M'' ausdrücken; durch das gewöhnliche Verfahren der Elimination wird man also finden, daß $x = \alpha$. Da nun die Abcisse des Punctes m der des Punctes M gleich ist, so folgt, daß die drey senkrechten PM, AM', P'M'' sich in einem und demselben Punct m schneiden; es würde sich eben so verhalten, wenn diese senkrechten sich außerhalb des Dreyecks schnitten.

Lehrsatz.

§. 27.

Wenn man aus der Mitte der Seiten eines Dreyecks nach den Scheiteln der gegenüber stehenden Winkel gerade Linien führt, so werden diese Geraden sich in einem und demselben Puncte schneiden.

Es seyen Fig. 10.

$Ap = \alpha$, $Ap' = \alpha'$, $AP' = x'$
$pm = \beta$, $p'm' = \beta'$, $P'M' = y'$
und $AP = a$;

man wird alsdann haben

$$pP = a - \alpha, \quad AB = \frac{a}{2}, \quad p'P = a - \alpha'.$$

Beweis.

Vermöge der angenommenen Bezeichnung ist die Gleichung der Geraden AM′

$$y = \frac{\beta}{\alpha} x \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1),$$

die der Geraden PM′ ist

$$y = - \frac{\beta'}{a - \alpha'} (x - a) \; . \; . \; . \; . \; . \; (2),$$

die der Geraden Pm ist

$$y = - \frac{\beta}{a - \alpha} (x - a) \; . \; . \; . \; . \; (3),$$

und die Geraden Am′ ist

$$y = \frac{\beta'}{\alpha'} x \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4).$$

Da überdieß die Puncte m, m′ respectiv die Mitten der Geraden AM′, M′P sind, so müssen die Ordinaten pm, p′m′ nothwendigerweise gleich seyn; also $\beta = \beta'$, und die Gleichungen (2), (4) werden

$$y = \frac{-\beta}{a - \alpha'} (x - a) \; . \; . \; . \; . \; . \; (2')$$

$$y = \frac{\beta}{\alpha'} x \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4').$$

Um die Coordinaten des Punctes M′ zu erhalten, combinire man die Gleichungen (1) und (2′) mit einander, in denen man x in x′ und y in y′ verwandelt, welches geben wird

$$x' = \frac{a\alpha}{a - \alpha' + \alpha}, \quad y' = \frac{a\beta}{a - \alpha' + \alpha},$$

und folglich

$$BP' = AP' - AB = \frac{a(\alpha + \alpha' - a)}{2(a - \alpha' + \alpha)}.$$

Da ferner die Gerade BM' unterworfen ist durch den Punct B, der Mitte von AP zu gehen, und mit dieser einen Winkel zu machen, dessen Tangente $\frac{P'M'}{BP'}$ ist, so wird ihre Gleichung seyn

$$y = \frac{2\beta}{\alpha + \alpha' - a}\left(x - \tfrac{1}{2}a\right) \ldots\ldots (5).$$

Ich bemerke nun, daß, damit die vorgelegten Geraden nur einen und denselben Durchschnitt haben, sie in diesem Puncte nothwendigerweise dieselben Coordinaten haben müssen; das Mittel, diesen Umstand zu untersuchen, besteht nun darin, die Gleichungen der Geraden Pm, Am', BM' zu je zweyen und zweyen zu combiniren. Man bemerkt in der That, daß (3) und (4') zu gleicher Zeit wie (4') und (5) geben

$$x = \frac{a\alpha'}{\alpha' - \alpha + a}.$$

Die drei Geraden Pm, Am', BM' sind also mit der oben vorgetragenen Eigenschaft behaftet *).

---

*) Wenn die Coordinaten des Durchschnittspunctes m'' der Geraden Am', Pm bekannt sind, so kann man den Satz, worauf es hier ankommt, noch dadurch beweisen, daß man die Gleichung der Geraden sucht, welche durch die Puncte M', m'' geht; setzt man dann in dieser Gleichung y=o, so erhält man

Der eben bewiesene Satz ist nur ein besondrer Fall von diesem weit allgemeinern Satze, den ich nirgends angeführt gefunden.

Wenn man zwey Seiten eines Dreyecks in einerley Anzahl gleicher Theile theilt, und von den Theilungspuncten nach den gegenüber stehenden Winkeln gerade Linien zieht, so werden die correspondirenden derselben einander in Puncten schneiden, welche auf der durch die Mitte der Basis und durch den gegenüber stehenden Scheitel gehenden Geraden liegen.

Der Beweis des besondren Falles zeigt hinlänglich den des gegenwärtigen Satzes, so daß wir uns entledigt glauben, uns hierüber in ein genaueres Detail einzulassen. Man sehe bloß Fig. 11.

Lehrsatz.

§. 28.

In jedem ebnen Vierecke, ist die Summe der Quadrate der vier Seiten gleich der Summe der Quadrate der Diagonallinien nebst dem vierfachen Quadrate der die Mitte dieser Diagonalen verbindenden Linie.

Es sey Fig. 12. der Punct A für den Anfangspunct der rechtwinklichten Coordinaten genommen, und es seyen

---

zur correspondirenden Abcisse AB, $x = \frac{a}{2}$; die Gerade M′m″ geht also auch durch die Mitte von AP.

$AA' = c$, $AB = c'$, $A'B' = c''$, $BB' = c'''$

$BM = \frac{BA'}{2} = d$, $B'M' = \frac{B'A}{2} = d'$, $MM' = m$.

Es seyen ferner

$\left.\begin{matrix}\alpha, \beta \\ \alpha', \beta'\end{matrix}\right\}$ Die Coordinaten der Puncte $\left\{\begin{matrix}M \\ M'\end{matrix}\right.$

Man wird offenbar vermöge dieser Bezeichnung haben

$BH = 2\beta$, $B'H' = 2\beta'$, $PA' = c - \alpha$, $P'A' = c - \alpha'$
$A'H = 2(c - \alpha)$, $AH' = 2\alpha'$, $AH = c - 2\alpha$,
$A'H' = 2\alpha' - c$ und $HH' = c - 2\alpha + 2\alpha'$.

Beweis.

Da die Entfernungen der beyden Puncte, deren Coordinaten x, y und x', y' sind, durch

$$\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$$

ausgedrückt sind, so folgt, daß man haben wird

$$c^2 = c^2$$
$$c'^2 = 4\beta^2 + (c - 2\alpha)^2$$
$$c''^2 = 4\beta'^2 + (c - 2\alpha')^2$$
$$c'''^2 = 4(\beta - \beta')^2 + (c + 2\alpha' - 2\alpha)^2.$$

Entwickelt man die angezeigten Potenzen, so findet man, wenn diese vier Gleichungen zusammen genommen und reducirt werden,

$$c^2 + c'^2 + c''^2 + c'''^2 =$$
$$4c^2 + 8\beta^2 + 8\beta'^2 + 8\alpha^2 - 8\alpha c - 8\alpha\alpha' - 8\beta\beta' + 8\alpha'^2.$$

Da der zweyte Theil auch folgendermaßen geschrieben werden kann

$$4(\alpha'^2 + \beta^2 + \beta'^2) +$$
$$4(c^2 - 2\alpha c + \alpha^2 + \alpha^2 - 2\alpha\alpha' + \alpha'^2 + \beta^2 - 2\beta\beta' + \beta'^2),$$

so kann man dieser letztern Gleichung folgende Form geben

$$c^2 + c'^2 + c''^2 + c'''^2 =$$
$$4(\alpha'^2 + \beta^2 + \beta'^2) + 4(c - \alpha)^2 + 4(\alpha - \alpha')^2 + 4(\beta - \beta')^2;$$

Aber andrerseits ist

$$4d^2 = 4\beta^2 + 4(c - \alpha)^2$$
$$4d'^2 = 4\alpha'^2 + 4\beta'^2$$
$$4m^2 = 4(\beta - \beta')^2 + 4(\alpha - \alpha')^2;$$

Es ist also

$$c^2 + c'^2 + c''^2 + c'''^2 = 4d^2 + 4d'^2 + 4m^2 =$$
$$D^2 + D'^2 + 4m^2,$$

wenn man die ganzen Diagonallinien durch D und D' bezeichnet.

Dieser elegante Lehrsatz, welchen man Eulern zuschreibt, ist im fünften Bande der neuen Petersburger Commentaren und in der Geometrie von Tedenat auf verschiedene Art bewiesen.

Lehrsatz.

§. 29.

Wenn zwey Vierecke, Fig. 13. gleiche Diagonallinien haben, welche überdies einerley Winkel einschließen, so sind diese Vierecke einander gleich, auf was für eine Art übrigens diese Linien einander schneiden mögen.

Es seyen

$$MM' = \delta, \quad AM = z, \quad PM = y$$
$$NN' = \delta', \quad AM' = z', \quad P'M' = y'$$

und der Sinus des Winkels MAN sey durch f vorgestellt.

Beweis.

Die Ordinaten PM, P′M′ sind respectiv die Seiten des rechten Winkels der rechtwinklichten Dreyecke APM, AP′M′, so wie AM und AM′ deren Hypothenusen sind; man hat also nach §. 2. des ersten Abschnitts

$$y = \mathfrak{f}z, \quad y' = \mathfrak{f}z'.$$

Da das Viereck MM′ aus den beyden Dreyecken MNN′, M′NN′ zusammengesetzt ist, so wird sein Flächeninhalt durch

$$\frac{y\delta' + y'\delta'}{2}$$

ausgedrückt seyn; substituirt man für y und y′ ihre oben erhaltene Werthe, so kommt

$$\delta' \left(\frac{z + z'}{2}\right) \mathfrak{f};$$

aber $z + z' = \delta$; es ist daher

$$\text{Fläche } M'NMN' = \frac{\delta\delta'}{2}\,\mathfrak{f};$$

mithin ist der Flächeninhalt des Vierecks beständig, in welchem Puncte sich auch die Diagonalen M′M, N′N schneiden mögen, wofern nur der Winkel MAN derselbe bleibt.

Aufgabe.

§. 30.

Wenn ein spitzer Winkel eines rechtwinklichten Dreyecks gegeben ist, die Lage der Hypothenuse dergestalt zu bestimmen, daß dieses Dreyeck einem gegebenen Quadrate gleich sey.

Es seyen Fig. 14. q^2 das gegebene Quadrat, a die

Tangente des bekannten Winkels APD, und α die unbekannte AP.

Auflösung.

Da die Gerade DP unterworfen seyn muß durch einen auf der Axe der Abcissen AX genommenen Punct P zu gehen, so ist ihre Gleichung

$$y = -a(x - \alpha).$$

Setzt man nun $x = 0$, so hat man für die correspondirende Ordinate AD, $y = a\alpha$.

Da der Flächeninhalt des Dreyecks ADP, $\frac{AD \times AP}{2} = \frac{a\alpha^2}{2}$ ist, so folgt, daß $q^2 = \frac{a\alpha^2}{2}$, und folglich

$$\alpha = \pm\sqrt{\left(\frac{2q^2}{a}\right)}.$$

Wenn der positive Werth von α durch AP, und sein negativer Werth durch Ap ausgedrückt wäre, so würden die beyden Dreyecke APD, ApD den beyden Auflösungen der vorgelegten Aufgabe ein Genüge thun.

Aufgabe.

§. 31.

Durch einen in Rücksicht auf einen bekannten Winkel M'AN der Lage nach gegebenen Punct M, Fig. 15. eine Gerade MN dergestalt zu führen, daß der Raum des Dreyecks AM'N einem gegebenen Quadrate gleich sey.

Es seyen α, β die rechtwinklichten Coordinaten des Punctes M; A der Anfangspunct; q^2 das gegebene

Quadrat; a die Tangente des Winkels M'AN; die unbekannten $P'M' = y$ und $AN = \alpha'$. Man wird dann haben

$$PN = \alpha' - \alpha.$$

Auflösung.

Die Gleichung der Geraden M'A ist

$$y = ax,$$

die der Geraden MN, die man sich als unterworfen durch den Punct N zu gehen denken muß, ist

$$y = \frac{-\beta}{\alpha' - \alpha}(x - \alpha').$$

Wenn die Coordinaten dieser Geraden gemeinschaftlich sind, so werden sie die des Punctes M' ihres gemeinschaftlichen Durchschnitts vorstellen; man wird also haben

$$y = \frac{a\alpha'\beta}{a(\alpha' - \alpha) + \beta}.$$

Aber der Flächeninhalt des Dreyecks AM'N ist

$$\frac{\alpha' y}{2} = q^2;$$

und wenn man in diesem Ausdruck den Werth von y substituirt, so wird man haben

$$\frac{a\alpha'^2\beta}{a(\alpha' - \alpha) + \beta} = 2q^2,$$

oder

$$a\alpha'^2\beta = 2q^2 a\alpha' - 2q^2 a\alpha + 2q^2\beta \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1).$$

Diese Gleichung in Rücksicht auf α' aufgelöst, giebt einen zweyten Punct N der gesuchten Linie, und die Aufgabe ist alsdann aufgelöst; da aber die Formel, die man in dieser Absicht construiren müßte, ein wenig verwickelt ist, so

so wird es nützlich seyn, sie vermittelst folgender Betrachtung zu vereinfachen.

Weil man für alle Puncte M' der Geraden AM'

$$\frac{y}{x} = a$$

hat, so sey

$$a = \frac{\beta}{n};$$

in diesem Falle wird die Größe n den zwischen der senkrechten PM und der der AM' parallel geführten Linie A'M liegenden Theil A'P ausdrücken; und bezeichnet man den Zwischenraum AA' durch d, so hat man AP, oder $\alpha = n - d$. Werden nun diese Werthe von a und α in der Gleichung (1) substituirt, so findet man, nachdem die sich darbiethenden Reductionen verrichtet worden,

$$\alpha'^2 \beta = 2q^2\alpha' + 2q^2 d,$$

woraus man zieht

$$\alpha' = \frac{q^2}{\beta} \pm \sqrt{\left(\frac{2q^2 d}{\beta} + \frac{q^4}{\beta^2}\right)},$$

oder, um mehrerer Leichtigkeit der Construction willen,

$$\alpha' = \frac{q^2}{\beta} \pm \sqrt{\left[\left(\frac{q^2}{\beta} + 2d\right)\frac{q^2}{\beta}\right]}.$$

Auf einer unbegränzten Linie PQ Fig. 15.* errichte man die senkrechte AC $= \beta$; nehme CO $=$ CM $=$ q, und nachdem man AM gezogen, führe man ihr durch den Punct O die parallele ON, welche CN für den Werth von $\frac{q^2}{\beta}$ bestimmen wird; dieses ist aus der Theorie der Proportionallinien klar. Es sey nun $\frac{q^2}{\beta} = m$, so wird sich der Werth von α' in

$$m + \sqrt{[(m + 2d) m]}$$

verwandeln. Da nun der mit dem Wurzeichen behaftete Theil eine mittlere Proportionallinie ausdrückt, so nehme man CQ = 2d, und auf NQ, als auf einen Durchmesser, beschreibe man einen halben Umkreis NVQ; die Sehne NV wird vermöge dieser Construction der Größe $\sqrt{[(m + 2d) m]}$ gleich seyn. Nimmt man also PN = NV, so wird man haben

$$PC = \alpha'.$$

Um den zweyten Werth von α' zu erklären, muß man in Erwägung ziehen, daß er dem Fall ein Genüge leistet, wo man die Gerade MN im Winkel A'Am führen wollte; und es könnte sich überdieß zutragen, daß d von der Seite der positiven x, oder daß β negativ sey; alle diese verschiedenen Umstände der Aufgabe bringen in den Constructionen Veränderungen hervor, von denen man sich leicht den Grund angeben kann.

In der Folge werden wir uns nicht mehr so sehr über die Art in einer algebraischen Formel alle Folgerungen und alle daraus herzuleitenden Constructionen zu entwickeln auslassen, um dem Fleiße der Leser etwas vorzubehalten. Wir wollen nur noch für den gegenwärtigen Fall anmerken, daß die vorhergehende Auflösung natürlich der Aufgabe zukommt, wo man sich vorlegt, durch einen gegebenen Punkt eine gerade Linie zu führen, welche irgend eine geradlinigte Figur in zwey Theile theilt, die ein bekanntes Verhältniß zu einander haben.

Aufgabe.

§. 32.

Wenn Fig. 16. ein Zirkel von einem bekannten Halbmesser und eine Linie CB der Lage nach in Rücksicht auf zwey feste Axen gegeben sind, dem Kreis eine Tangente TM zu führen, welche zugleich der CB parallel sey.

Es seyen r der Halbmesser des Kreises, a die trigonometrische Tangente des Winkels BCA, und α die bekannte Entfernung AT.

Auflösung.

Da die Linie MT der BC parallel werden muß, so wird der Winkel MTA nothwendigerweise dem Winkel BCA gleich seyn; vermittelst des Lehrsatzes der Tangenten (§. 21.), hat man also

$$a = \frac{r}{\sqrt{(\alpha^2 - r^2)}} \ldots\ldots\ldots (1),$$

wie man sich leicht überzeugen kann. Ferner ist

$$a = \frac{PM}{PT} = \frac{x}{y} \ldots\ldots\ldots\ldots (2):$$

Die Gleichung der Tangente TM, welche ist

$$\beta y + \alpha x = r^2,$$

wird, wenn $\beta = 0$

$$\alpha x = r^2 \text{ oder } x = \frac{r^2}{\alpha}.$$

Die Gleichung des Kreises

$$x^2 + y^2 = r^2$$

giebt

$$y = \sqrt{(r^2 - x^2)};$$

oder, wenn man x vermöge seines vorhergehenden Werths eliminirt,

$$y = \frac{r}{\alpha} \sqrt{(\alpha^2 - r^2)},$$

substituirt man die Werthe von x und y in die Gleichung (2), so erhält man die Gleichung (1); und diese letztere in Rücksicht auf α aufgelöst, giebt für die gesuchte Auflösung

$$\alpha = \frac{r \sqrt{(a^2 + 1)}}{a},$$

oder, wenn man, um die Glieder homogen zu machen, die Einheit durch m bezeichnet (§. 76. L. C.)

$$\alpha = \frac{r \sqrt{(a^2 + m^2)}}{a}.$$

Um diese Größe zu construiren, fälle man vom Puncte A auf die Gerade BC die senkrechte AB, und man führe durch den äußersten Punkt M des Halbmessers AM die Tangente MT, welche mit der vorgetragenen Eigenschaft behaftet seyn wird. In der That wird, da CB für m genommen, und der Winkel ABC nach der Construction ein rechter ist, die Linie AB die Tangente des Winkels BCA vorstellen. Ferner hat man wegen der Parallelen CB, MT diese Proportion

$$AB : AM = CA : AT,$$

oder in algebraischen Ausdrücken

$$a : r = \sqrt{a^2 + m^2} : \alpha = \frac{r \sqrt{(a^2 + m^2)}}{a}.$$

Uebrigens ist diese Auflösung nicht der vorgelegten Aufgabe besonders eigen; denn wenn die gegebene Curve eine Parabel wäre, und man wollte (wenn alles übrige

gleich ist) die Werthe der Coordinaten des Berührungspunctes finden, so würde man eben so die Gleichung dieser Curve mit der Gleichung

$$\frac{p}{2y'} = a$$

vergleichen, welche (§. 18.) die trigonometrische Tangente des von der Tangente der Curve und der Axe der Abcissen gebildeten Winkels ist, und man würde haben

$$x' = \frac{p}{4a^2}, \quad y' = \frac{p}{2a}.$$

Aufgabe.

§. 33.

Zweyen der Größe und Lage nach gegebenen Kreisen eine gemeinschaftliche Tangente zu führen.

Es seyen Fig. 17. $AA' = \delta$, r der Halbmesser des Kreises AM, r' der Halbmesser des Kreises A'M', α die unbekannte Entfernung AT, und a die trigonometrische Tangente des Winkels MTA.

Auflösung.

Es folgt aus dem vorhergehenden Lehrsatze und daraus, daß M'T die beyden gegebenen Kreise berühren muß, daß für den Kreis AM

$$a = \frac{r}{\sqrt{(\alpha^2 - r^2)}},$$

und für den Kreis A'M'

$$a = \frac{r'}{\sqrt{[(\alpha + \delta)^2 - r'^2]}}.$$

Setzt man diese beyden Werthe einander gleich und schafft das Wurzelzeichen hinweg, so kommt

$$\frac{r^2}{\alpha^2 - r^2} = \frac{r'^2}{(\alpha + \delta)^2 - r'^2}.$$

Schafft man die Nenner hinweg und entwickelt, so findet man nach der Reduction

$$\alpha^2 r^2 + 2\alpha\delta r^2 + \delta^2 r^2 = \alpha^2 r'^2.$$

Zieht man aus beyden Theilen die Quadratwurzel, so hat man

$$\alpha r + \delta r = \alpha r',$$

und endlich

$$\alpha = \pm \frac{\delta r}{r' - r} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (1),$$

welches wegen des doppelten Zeichens $\pm$ anzeigt, daß die Aufgabe zweyer Auflösungen fähig ist; es ist aber klar, daß es überdieß noch zwey andre giebt, welche in Beziehung auf den Fall sind, wo die Tangente M″M‴ die Linie AA′ zwischen beyden Kreisen schneidet. Um diese neuen Auflösungen zu erhalten, darf man bloß in Erwägung ziehen, daß der Halbmesser r des Kreises AM, welcher in dem Ausdruck der Tangente M″T′ vorkommt, in Rücksicht des Halbmessers r′ des Kreises A′M′ negativ genommen werden muß. Die Gleichung (1) wird also

$$\alpha = \pm \frac{\delta r}{r' + r}.$$

Die Auflösung dieser Aufgabe hängt von der vorhergehenden ab; indessen sind beyde nur besondre Fälle einer weit ausgedehntern, in der höhern Geometrie von Lacroix §. 91. abgehandelten Aufgabe. Da es ange-

messen ist, sich vorzugsweise an den allgemeinen Auflösungen zu halten, so wollen wir zur Analysis der folgenden Aufgabe übergehen.

Aufgabe.

§. 34.

Wenn zwey Kreise der Größe und Lage nach gegeben sind, durch dieselbe eine gerade Linie dergestalt durchzuführen, daß die in denselben liegenden Theile dieser Geraden einander, und einer gegebenen Linie m gleich seyen.

Es seyen Fig. 18.

$\left.\begin{matrix} r \\ r' \end{matrix}\right\}$ die Halbmesser der gegebenen Kreise $\left\{\begin{matrix} C \\ C' \end{matrix}\right.$

Wir wollen überdieß $CC' = \delta$, $C'A = \alpha$ setzen, und durch a die Tangente des Winkels CAB bezeichnen.

Auflösung.

Um den zu Ende des vorhergehenden §. vorgesetzten Zweck zu erreichen, wollen wir den im §. 91. des citirten Werks von Lacroix erhaltenen Ausdruck für die trigonometrische Tangente des Winkels A wieder vornehmen, und wir wollen darin alle die Veränderungen anbringen, welche unsre angenommene Bezeichnung erfordert. Also hat man beym Kreise C für den Werth der Tangente CAB,

$$a = \frac{\sqrt{(4r^2 - m^2)}}{\sqrt{[4(\alpha + \delta)^2 - 4r^2 + m^2]}},$$

und beym Kreise C′ hat eben diese Tangente zum Ausdruck

$$a = \frac{\sqrt{(4r'^2 - m^2)}}{\sqrt{(4\alpha^2 - 4r'^2 + m^2)}}.$$

Setzt man diese Werthe, von ihren Wurzelzeichen befreyet, einander gleich, dividirt alles durch 4, und setzt zur Abkürzung $r^2 - \frac{m^2}{4} = h^2$, $r'^2 - \frac{m^2}{4} = h'^2$, so wird man haben

$$\frac{h^2}{(\alpha + \delta)^2 - h^2} = \frac{h'^2}{\alpha^2 - h'^2}.$$

Schafft man die Nenner weg, entwickelt und reducirt, so findet man

$$\alpha^2 h^2 = \alpha^2 h'^2 + 2\alpha\delta h'^2 + \delta^2 h'^2.$$

Zieht man von beiden Seiten die Quadratwurzel, so erhält man

$$\alpha h = \pm (\alpha h' + \delta h'),$$

woraus man endlich zieht

$$\alpha = \pm \frac{\delta h'}{h \mp h'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Diese Formel, bloß in Rücksicht der beyden obern Zeichen betrachtet, kann auf folgende Art construirt werden.

Auf die Halbmesser CB, C′B′ der gegebenen Kreise beschreibe man halbe Umkreise, und durch die Puncte B, B′ führe man die Sehnen BD, B′D′ unter einander und der Hälfte der gegebenen Geraden m gleich; ziehe die Sehnen CD, C′D′, welche die respectiven Größen von h und von h′ seyn werden.

Man führe dann CP der C′D′ parallel; nehme $Cn = h - h'$, und $Cq = h$; verbinde die Puncte n, C′, und durch die Puncte q, D′ führe man in A die Gerade qD′A; so wird der Punct A derjenige seyn,

durch welchen die vorgelegte Secante geführt werden muß.

Endlich beschreibe man auf C′A als Durchmesser einen halben Umkreis; trage C′D′ von C′ in d, und ziehe die unbegränzte Gerade Ad, welche diejenige seyn wird, von der die in den Kreisen liegenden Theile derselben einander und der gegebenen Linie m gleich seyn werden.

Wenn m = 0, so erlangen die Größen h und h′ respectiv die Werthe r und r′, und alsdann wird die Gleichung (1)

$$\alpha = \pm \frac{\delta r'}{r \mp r'},$$

welche offenbar auf die des vorhergehenden §. zurück kommt, wenn man r in r′ und umgekehrt verwandelt.

§. 35.

Der Ausdruck

$$a = \frac{\sqrt{(4r'^2 - m^2)}}{\sqrt{(4\alpha^2 - 4r'^2 + m^2)}},$$

auf welchem die Auflösung dieser obigen gegründet ist, nimmt eine neue Form an, wenn $\alpha = r'$; in diesem Falle, welcher mit demjenigen übereinstimmt, wo es darauf ankommt, durch den äußersten Punct des Durchmessers eines bekannten Kreises eine Sehne von einer gegebenen Größe m zu ziehen, hat man

$$a = \frac{\sqrt{(4r'^2 - m^2)}}{m},$$

woraus folgt

$$m = \frac{2r}{\sqrt{(a^2 + 1)}} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Hierdurch ist nun der folgende Satz leicht analytisch zu beweisen.

Lehrsatz.

§. 36.

Wenn man durch den Berührungspunct zweyer gegebenen Kreise zwey Gerade AB, AB′ Fig. 19. nach Belieben führt, welche diese Kreise schneiden, so werden die Sehnen AB, AB′ durch den Umkreis des kleinern Kreises in proportionale Theile geschnitten weeden, und folglich werden die Linien BB′, DD′ parallel seyn.

Es seyen

$\left.\begin{matrix} r \\ r' \end{matrix}\right\}$ die Halbmesser $\left\{\begin{matrix} AC \\ AC' \end{matrix}\right.$ $\quad$ $\left.\begin{matrix} a \\ a' \end{matrix}\right\}$ die Tangenten $\left\{\begin{matrix} B\acute{A}X \\ B'AX, \end{matrix}\right.$

und wir wollen durch

M, M′, m, m′ ⟩ die Sehnen ⟨ AB, AB′, AD, AD′

bezeichnen.

Beweis.

Man wird vermöge der Gleichung (2) des vorhergehenden §. haben

$$M = \frac{2r}{\sqrt{(a^2+1)}}, \quad M' = \frac{2r}{\sqrt{(a'^2+1)}}$$

$$m = \frac{2r'}{\sqrt{(a^2+1)}}, \quad m' = \frac{2r'}{\sqrt{(a'^2+1)}},$$

woraus man zuvörderst schließt

$$M : m = r : r' = M' : m'.$$

Man könnte auch direct beweisen, daß die Geraden BB′, DD′ parallel sind; denn bezeichnet man die re-

spectiven Coordinaten der Puncte B, D, B′, D′ durch X, Y; x, y; X′, Y′; x′, y′; so würden die Tangenten der von den Geraden BB′, DD′ und der Axe der Abcissen AX gebildeten Winkel seyn

$$\frac{Y - Y'}{X' - X} \text{ und } \frac{y - y'}{x' - x},$$

welche Werthe einander gleich sind, wie man sich durch eine einfache Substitution der Werthe der Coordinaten überzeugen kann.

Dieser Lehrsatz, welcher sehr merkwürdig ist, führt auf eine sehr elegante Auflösung der folgenden Aufgabe.

Wenn zwey Puncte der Lage nach in Rücksicht auf einen bekannten Kreis gegeben sind, einen neuen Kreis zu beschreiben, welcher den ersten berühre, und welcher durch die beyden gegebenen Puncte gehe.

Man kann hierüber Ozanams Récréations Mathématiques, neue Ausgabe, zu Rathe ziehen.

Aufgabe.

§. 37.

Wenn ein Kreis der Größe und Lage nach in einem bekannten Winkel gegeben ist, den Mittelpunct eines Kreises zu finden, welcher zugleich die Schenkel des Winkels und den gegebenen Kreis berühre.

Es seyen Fig. 20. α und β die Coordinaten des auf der Geraden AM gelegenen Punctes M; α' und β' die Coordinaten des Mittelpunctes M′ des gesuchten Kreises; r der Halbmesser des bekannten Kreises, $b = PN$

die Ordinate des Mittelpunctes dieses Kreises, und $AN = B$.

Auflösung.

Da der Kreis P'C die Seiten AX, AC berühren muß, so wird sein Mittelpunct auf der Geraden AM liegen, welche den Winkel CAX in zwey gleiche Theile theilt, und die Mittelpuncte M', N, so wie der Berührungspunct D werden in einer geraden Linie liegen. Zwischen den Coordinaten der Puncte M, M', welche auf einerley Geraden AM liegen, ist diese Beziehung anzutreffen.

$$\frac{\beta'}{\alpha'} = \frac{\beta}{\alpha} \text{ oder } \alpha\beta' = \alpha'\beta.$$

Ferner hat man zwischen den Entfernungen M'N der Mittelpuncte und den Coordinaten ihrer Endpuncte diese andre Beziehung

$$(r + \beta')^2 = (b - \beta')^2 + (\alpha - \alpha')^2;$$

entwickelt man diese, reducirt und substituirt man für β' den aus der ersten Gleichung gezogenen Werth $\frac{\alpha'\beta}{\alpha}$, so kommt, weil $B^2 = \alpha^2 + b^2$,

$$r^2 + \frac{2\alpha'\beta r}{\alpha} = B^2 - \frac{2b\beta\alpha'}{\alpha} + \alpha'^2 - \frac{2\alpha^2\alpha^4}{\alpha},$$

woraus man zieht, wenn sie in Rücksicht auf α' aufgelöst wird

$$\alpha' = \alpha + \beta\frac{(b+r)}{\alpha} \pm \sqrt{\left\{\left[\alpha + \beta\left(\frac{b+r}{\alpha}\right)\right]^2 - (B^2 - r^2)\right\}}.$$

Diese Größe ist einer sehr einfachen und eleganten Construction fähig. In der That nehme man $AQ = b + r$, und die Ordinate QR wird zum analytischen Ausdruck

haben $\beta \frac{b+r}{\alpha}$; man trage RQ von P in R', und AR' wird die rationale Größe vorstellen; man führe dann dem gegebenen Kreise die Tangente AT, welche der Größe $\sqrt{(B^2 - r^2)}$ gleich seyn wird, weil $AT^2 = AN^2 - NT^2$, verlängre NT unbegränzt, und mache AS = AR'; die Wurzelgröße wird durch TS vorgestellt seyn. Endlich nehme man SV = AS und SV' = ST; so werden die Theile TV, VV' die beyden Werthe von α' seyn. Der erste Theil stimmt mit dem Fall überein, wo der gegebene Kreis zwischen dem Anfangspunct und dem zu beschreibenden Kreise liegt, und der zweyte mit dem Falle, wo der zu beschreibende Kreis zwischen dem gegebenen Kreise und dem Anfangspunct liegt.

Aufgabe.

§. 38.

Ein Trapezium Fig. 21. durch eine beyden Grundlinien parallele Linie in zwey gleiche Theile zu theilen.

Es seyen

$$AB = b,\quad BD = h,\quad AC = h',$$
$$AP = x,\quad PM = y.$$

Auflösung.

Da die Gleichung der Geraden CD

$$Y = \frac{h - h'}{b}(X) + h',$$

ist, so hat man zwischen den Coordinaten des Punctes M die Beziehung

$$y = \frac{h - h'}{b} x + h',$$

und weil der Flächeninhalt des Trapeziums

$$ABCD = \frac{h + h'}{2} b,$$

so wie der des Trapeziums

$$APMC = \frac{(h - h') x + 2bh'}{2b} x$$

so kann man daraus herleiten

$$[(h - h') x + 2bh'] x = \frac{(h + h') b^2}{2}$$

oder

$$2(h - h') x^2 + 4bh'x = (h + h') b^2 \ldots\ldots (A),$$

woraus man zieht

$$x = -\frac{bh'}{h - h'} + \sqrt{\left[\left(\frac{h + h'}{2} + \frac{h'^2}{h - h'}\right)\frac{b^2}{h - h'}\right]} \ldots (B).$$

Man nimmt gleich wahr, daß sich diese Formel sehr vereinfachen lassen muß, wenn eine der Grundlinien, zum Beyspiel h' Null ist. In der That hat man für den Fall des Dreyecks

$$x = \pm \sqrt{\frac{b^2}{2}};$$

wenn aber $h = h'$, so kann man aus der Gleichung (B) in dem Zustande, worin sie sich gegenwärtig befindet, nichts herleiten; alsdann würde man die Reduction der Gleichung (A) vollziehen; oder besser, man würde folgendermaßen verfahren:

Man verwandle in der Formel (B) h in $h' + q$, so wird sie

$$x = \frac{-bh' \pm b\sqrt{[\frac{1}{2}(2h'q + q^2 + 2h'^2)]}}{q};$$

man etwickle die Wurzelgröße in Rücksicht der zunehmenden Potenzen von q, welche sich nach der Binomialformel, oder besser, nach der Methode der unbestimmten Coefficienten bewerkstelligen läßt, und man wird diese Reihe haben

$$x = \frac{b}{2} + \frac{bq}{8h'} + \ldots\ldots$$

Wenn $h' = h$ hat man $q = o$, und alsdann verschwinden alle Glieder dieser Reihe außer das erste $\frac{b}{2}$; woraus folgt $x = \frac{b}{2}$, wie sich auch erwarten ließ. Um eine ausgebreitetere Kenntniß von diesem analytischen Verfahren zu erlangen, sehe man den schon citirten Lehrbegriff der Differentialrechnung.

Lehrsatz.

§. 39.

Ein schiefwinklichtes Dreyeck durch zwey sich unter rechten Winkeln schneidende Linien in vier gleiche Theile zu theilen.

Es seyen Fig. 22. $AB = a$, α und β die Coordinaten des Scheitels C des gegebenen Dreyecks

$$BN = z, \quad AN' = z',$$

so wird man haben

$$AN = a - z;$$

es sey ferner

$$BD = a - \alpha = c,$$

so wird man haben

$$\text{Fläche } ACB = \frac{a\beta}{2}.$$

Auflösung.

Die Gerade AC hat zur Gleichung

$$y = \frac{\beta}{\alpha} x \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1),$$

die Gerade CB

$$y = \frac{-\beta}{c} (x - a) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (2),$$

die Gerade NH

$$y = A (x - a + z) \quad . \; . \; . \; . \quad (3),$$

die Gerade N'H'

$$y = \frac{-1}{A} (x - z') \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (4).$$

Combinirt man nun die Gleichungen (2), (3), so wird für die Ordinate des Punctes H erfolgen

$$y = Hh = \frac{A\beta z}{Ac + \beta},$$

und da der Flächeninhalt des Dreyecks

$$NHB = \frac{ACB}{2} = \frac{a\beta}{4},$$

so wird man haben

$$\frac{A\beta z^2}{Ac + \beta} = \frac{a\beta}{4},$$

woraus man zieht

$$A = \frac{a\beta}{2z^2 - ac} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (T)$$

Verbindet man auf eben die Art die Gleichungen (1) und (4) mit einander, so wird man für die Ordinate des Punctes H' erhalten

$$y = H'h' = \frac{\beta z'}{A\beta + \alpha},$$

und

und da der Flächeninnhalt des Dreyecks

$$AN'H' = \frac{ACB}{2} = \frac{a\beta}{4},$$

so hat man

$$\frac{\beta z'^2}{A\beta + \alpha} = \frac{a\beta}{2},$$

woraus man zieht

$$A = \frac{2z'^2 - a\alpha}{a\beta} \ldots\ldots (T').$$

Um nun eine erste Beziehung zwischen z und z' zu erhalten, setze man die beyden Werthe von A einander gleich, und man wird haben, nachdem die Nenner hinweg geschaft seyn werden

$$(2z'^2 - a\alpha)(2z^2 - ac) = a^2\beta^2 \ldots\ldots (m).$$

Andrerseits werden die Gleichungen der Geraden NH, N'H', wenn man respectiv für A dessen Werthe (T), (T') substituirt

$$y = \frac{a\beta}{2z^2 - ac}(x - a + z)$$

$$y = \frac{-a\beta}{2z'^2 - a\alpha}(x - z')$$

welches für die Ordinate des Durchschnittspunctes K eben dieser Geraden giebt

$$y = Kk = \frac{a\beta z' - a^2\beta + a\beta z}{2z^2 - ac + 2z'^2 - a\alpha};$$

da aber

$$NN' = AN' - AN = z' - a + z,$$

und weil der Flächeninnhalt des Dreyecks NKN' = $NN' \times \frac{Kk}{2} = \frac{ACB}{4}$, so wird man diese andre Beziehung zwischen den Unbekannten z, z' haben

$$\frac{a\beta(z'-a+z)^2}{2z^2-ac+2z'^2-a\alpha}=\frac{a\beta}{4},$$

oder wenn man für C dessen Werth $a-\alpha$ setzt und vereinfacht

$$4(z'-a+z)^2=2z^2-a^2+2z'^2,$$

oder endlich

$$2z'^2+2z^2+5a^2-8az'+8zz'-8az=0\ldots(N).$$

Wollte man eine geometrische Auflösung der vorgelegten Aufgabe haben, so dürfte man nur besonders die Curven construiren, deren Fortgang durch die beyden Gleichungen (M), (N) bestimmt ist; die verschiedenen Durchschnittspuncte dieser Curven würden die Werthe von z und z′ geben, und man würde dann die Lage des Punctes K finden, in welchen sich die Geraden NH, N′H′ senkrecht durchschneiden müssen. Man könnte noch zu eben dem Zwecke gelangen, wenn man nach der zu Ende der höhern Geometrie von Lacroix auseinandergesetzten Methode, die aus der Elimination einer unbekannten Größe aus den Gleichungen (M), (N) erfolgende Gleichung vom achten Grade bestimmte; ich muß indessen gestehen, daß die Approximatiosmethoden, auf dem Punct, worin sie jetzt stehen, vorzugsweise anzubringen sind, weil sie immer mit vieler Genauigkeit zu Resultaten führen, welche die geometrischen Constructionen nur sehr unvollkommen erreichen.

Lehrsatz.

§. 40.

Wenn man von dreyen ungleichen, der Größe und Lage nach in einer Ebne gegebenen Kreisen,

je zweyen und zweyen derselben die äußere Tangenten führt, bis sie einander schneiden, so werden die auf diese Art erhaltenen drey Durchschnittspuncte in einer geraden Linie liegen.

Es seyen Fig. 23.

$\left.\begin{matrix} x,\ y \\ x',\ y' \end{matrix}\right\}$ die Coordinaten der Puncte $\left\{\begin{matrix} M \\ M' \end{matrix}\right.$

$\left.\begin{matrix} C'C'' = a,\ CC'' = a',\ CC' = a'',\ r \\ C'M = b,\ CM' = b',\ AC' = b'',\ r' \\ \text{und } pC'' = h' \qquad r'' \end{matrix}\right\}$ die Halbmesser der Kreise $\left\{\begin{matrix} C \\ C' \\ C'' \end{matrix}\right.$

Erster Beweis.

Da die Mittelpuncte der Kreise gegeben sind, so ist das Dreyeck CC'C'' bekannt; nach der Aufgabe des §. 24. wird also die Länge der durch die senkrechte pC'' gebildeten Segmente für pC' seyn

$$\frac{a''^2 + a^2 - a'^2}{2a''},$$

und für pC

$$\frac{a''^2 + a'^2 - a^2}{2a''}.$$

Ferner hat man nach dem Satze des §. 33.

$$C'M = b = \frac{ar'}{r'' - r'}$$

$$CM' = b' = \frac{a'r}{r'' - r},$$

und

$$AC' = b'' = \frac{a''r'}{r - r'};$$

und da der Sinus des Winkels $pC'C'' = \frac{pC''}{C'C''} = \frac{PM}{C'M},$

so wie der Sinus des Winkels $pCC'' = \frac{pC''}{CC''} = \frac{P'M'}{CM'}$; so wird man durch die analytischen Ausdrücke dieser Werthe die beyden Gleichungen erhalten

$$\frac{h}{a} = \frac{y(r''-r')}{ar'}, \quad \frac{h}{a'} = \frac{y'(r''-r)}{a'r},$$

aus welchen man zieht

$$y = \frac{hr'}{r''-r'}, \quad y' = \frac{hr}{r''-r}.$$

Damit nun der Lehrsatz statt finde, ist es erforderlich, daß die Abcissen x, x' mit den Ordinaten y, y' in einerley Verhältniß stehen. Man suche daher die Werthe von AP und von AP' in eben den Functionen als die der Ordinaten PM, P'M', und in dieser Hinsicht bemerke man, daß der Cosinus des Winkels $pC'C'' = \frac{pC'}{C'C''} = \frac{PC'}{C'M'}$ und daß der des Winkels $pCC'' = \frac{pC}{CC''} = \frac{P'C}{CM'}$; diese Größen werden also werden

$$\frac{a''^2 + a^2 - a'^2}{2a''a} = \frac{PC'(r''-r')}{ar'}$$

$$\frac{a''^2 + a'^2 - a^2}{2a''a'} = \frac{P'C(r''-r)}{a'r},$$

welches giebt

$$PC' = \frac{(a''^2 + a^2 - a'^2)r'}{2a''(r''-r')},$$

und

$$P'C = \frac{(a''^2 + a'^2 - a^2)r}{2a''(r''-r)}.$$

Hieraus schließen wir, daß

$$x = AC' - PC' = \frac{a''r'}{r - r'} - \frac{(a''^2 + a^2 - a'^2)\, r'}{2a''(r'' - r')},$$

und daß

$$x' = AC + P'C = \frac{a''r}{r - r'} + \frac{(a''^2 + a'^2 - a^2)\, r}{2a''(r'' - r)}.$$

Bringt man die Glieder der zweyten Theile dieser Gleichungen auf einerley Benennung, so gelangt man zu

$$x = \frac{r'[2a''^2(r'' - r') - (a''^2 + a^2 - a'^2)(r - r')]}{2a''(r - r')(r'' - r)},$$

und

$$x' = \frac{r[2a''^2(r'' - r) + (a''^2 + a'^2 - a^2)(r - r')]}{2a''(r - r')(r'' - r)}.$$

Da nun in diesen letztern Ausdrücken die gebrochenen Multiplicatoren $\frac{r'}{r'' - r'}$ und $\frac{r}{r'' - r}$ einander gleich sind, wie man sich durch die Entwicklung überzeugen kann, so folgt, daß man hat

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'};$$

welches bewiesen werden sollte.

Ungeachtet der obige Beweis von Seiten der Genauigkeit nichts zu wünschen übrig läßt, so glauben wir doch, daß man den, welchen wir noch sogleich von diesem Lehrsatze geben wollen, nicht ohne Interesse lesen wird. Um nicht unnöthigerweise eine neue Bezeichnung anzunehmen, wollen wir bis auf einige kleine Abändrungen, die gleich angezeigt werden sollen, von der vorhergehenden Gebrauch machen.

Zweyter Beweis.

Durch den Punct C″ führe man die Gerade RC″,

welche wir durch d bezeichnen wollen, der AX parallel; und wir wollen vorläufig annehmen, daß die Durchschnittspuncte A, M, M′ der Tangenten zu je zweyen und zweyen nicht in gerader Linie seyen, und daß sie die gebrochene Linie AMm bilden. Man mache Cm $= \beta$ und CM′ $= \beta'$, und betrachte M′ nur als den Durchschnittspunct der durch die Mittelpuncte C, C″ geführten Geraden CC″ mit der durch die Durchschnittspuncte A, M der Tangenten zu je zweyen und zweyen, geführten Geraden AM.

Dieses vorausgesetzt, geben die ähnlichen Dreyecke RC″M′, ACM′ die Proportion

$$d : C''M', (a'+\beta') = AC, (a''+b'') : CM', (\beta'),$$

woraus folgt

$$d\beta' = (a' + \beta')\,(a'' + b''),$$

oder, um abzukürzen

$$d\beta' = (a' + \beta')\,h,$$

und folglich

$$\beta' = \frac{a'h}{d - h}.$$

Wird ferner der Punct m als der Durchschnittspunct der den beyden Kreisen C und C″ gemeinschaftlichen Tangenten betrachtet, so hat man vermittelst der ähnlichen Dreyecke C″n″m, Cnm

$$\beta = \frac{a'r}{r'' - r};$$

aus dieser Gleichheit und der vorigen erhält man also, wenn die eine durch die andre dividirt wird,

$$\beta\,(hr'' - hr) = \beta'\,(dr - hr) \;\ldots\; (A).$$

Ich bemerke nun, daß lediglich vom Zusammenfal-

len der Püncte m, M′ die Wahrheit des vorgelegten Satzes abhängt; und in diesem Falle kommt es nur darauf an zu untersuchen, ob die Gleichung

$$hr'' - hr = dr - hr$$

statt hat, oder ob

$$hr'' = dr.$$

In dieser Hinsicht wollen wir zuvörderst zu dem schon im ersten Beweise gebrauchten Ausdruck von C′A unsre Zuflucht nehmen, oder zu dem welchen die ähnlichen Dreyecke CNA, C′N′A unmittelbar darbiethen; auf der einen und der andern Art hat man

$$b'' = \frac{a''r'}{r - r''},$$

oder

$$r = \frac{(a'' + b'')\,r'}{b''};$$

und folglich

$$dr = (a'' + b'')\frac{dr'}{b''} = \frac{hdr'}{b''}.$$

Andrerseits werden im Dreyecke RC″M die Linien RC″, AC′, welche nach der Construction parallel sind, in den Puncten K, k durch die Gerade MK in proportionale Theile geschnitten werden, man hat also diese Proportion

$$AC',\ (b'') : RC'',\ (d) = C'k : C''K;$$

aber

$$C'k : C''K = r' : r'',$$

also

$$b'' : d = r' : r'',$$

woraus folgt

$$r'' = \frac{dr'}{b''};$$

mithin

$$hr'' = \frac{hdr'}{b''};$$

die Gleichung (A) reducirt sich also auf

$$\beta = \beta';$$

es wird also endlich der Durchschnittspunct m der Tangenten mit dem auf der Verlängerung der Geraden AM gelegenen Punct M' zusammen fallen.

Setzt man in der Gleichung (A) $r'' = r$, so wird man erhalten Fig. 24.

$$\beta = \beta' \left(\frac{dr - hr}{o}\right);$$

eine unendliche Größe, welche uns anzeigt, nicht nur, daß die Tangenten M'n'', M'K einander parallel sind, sondern auch, daß die Linie CC'', welche die Mittelpuncte der gleichen Kreise verbindet, der Geraden AM parallel ist, welche durch die Durchschnittspuncte der den beyden ungleichen Kreisen gemeinschaftlichen Tangenten geht (Fig. 24.). Dieser Satz, dessen meines Wissens nirgends Erwähnung geschieht, ist nichts desto weniger elegant; man kann nach dem Vorhergehenden leicht davon einen Beweis à priori geben, und wir wollen für die mit der Geometrie der Oberflächen vertrauten Leser anmerken, daß eben dieser Satz sehr natürlich auf folgenden führt.

Wenn von dreyen der Lage und Größe nach gegebenen Kugeln zwey gleich sind, so ist der gemeinschaftliche Durchschnitt der durch die Mittelpuncte der drey Kugeln

gehenden Ebne und der sie berührenden Ebne immer der Geraden parallel, welche die Mittelpuncte der beyden gleichen Kugeln verbindet.

Lehrsatz.

§. 41.

Wenn man aus einer beliebigen Anzahl Puncte einer in Rücksicht auf irgend eine Curve von der zweyten Ordnung der Lage nach gegebenen Geraden, Fig. 25., dieser Curve immer paarweise Tangenten führt, so werden alle Linien, welche die Berührungspuncte eines und desselben Paares dieser Tangenten verbinden, einander in einem und demselben Puncte schneiden; und umgekehrt.

Es seyen

$$AT = \alpha, \quad TT' = \beta',$$

wo TT' die gegebene Linie ist.

Es seyen überdies

$$\left.\begin{matrix} X', y' \\ x', Y \end{matrix}\right\} \text{die Coordinaten der Puncte} \left\{\begin{matrix} m' \\ M'. \end{matrix}\right.$$

Beweis.

Wir wollen zuvörderst annehmen, daß die Curve der zweyten Ordnung eine durch

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$$

ausgedrückte Ellipse sey.

Die Gleichung der Tangente, welche unterworfen

ist durch einen Punct zu gehen, dessen positive Coordinaten α, β sind, ist nach §. 20.

$$y = \frac{a^2b^2 - b^2\alpha x}{a^2\beta}.$$

Um nun die Coordinaten der Berührungspuncte zu finden, muß man x und y in den vorhergehenden Gleichungen einerley Werthe beylegen. Substituirt man also in der Gleichung der Curve den aus der Gleichung der Tangente erfolgenden Werth für y, so wird man haben

$$\frac{a^4b^4 + b^4\alpha^2x^2 - 2a^2b^4\alpha x}{a^2\beta^2} = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2),$$

welches giebt

$$x = \frac{a^2b^2\alpha \pm a^2\beta \sqrt{(\alpha^2b^2 + a^2\beta^2 - a^2b^2)}}{a^2\beta^2 + \alpha^2b^2},$$

oder um abzukürzen

$$x = \frac{a^2\alpha b^2 \pm a^2\beta M}{N},$$

folglich

$$X' = \frac{a^2\alpha b^2 + a^2\beta M}{N}, \quad x' = \frac{a^2\alpha b^2 - a^2\beta M}{N}.$$

Man kann leicht einsehen, daß weil die Gleichung der Tangente giebt

$$x = \frac{a^2b^2 - a^2\beta y}{\alpha b^2},$$

die Gleichung der Curve alsdann wird

$$a^4b^4 + a^4\beta^2y^2 - 2a^4b^2\beta y + a^2\alpha^2b^2y^2 = a^2\alpha^2\beta^4,$$

woraus man zieht

$$y = \frac{a^2\beta b^2 \pm \alpha b^2 M}{N},$$

folglich

$$Y' = \frac{a^2\beta b^2 + \alpha b^2 M}{N}, \quad y' = \frac{- a^2\beta b^2 + \alpha b^2 M}{N} \text{ *)}.$$

Wir wollen nun annehmen, daß wenn es möglich wäre, die Sehnen Mm, M'm' einander in einem von dem auf der Axe AX genommenen Punct P, verschiedenen Punct V schnitten; so wird man bey der Annahme, daß die drey Puncte M', V, m' in gerader Linie liegen, die Proportion haben

$$X' - x' : Y' + y' = X' - \frac{a^2}{\alpha} : RV \text{ **)},$$

welche vermittelst der analythischen Werthe sich in

$$\frac{2 a^2\beta M}{N} : \frac{2 \alpha b^2 M}{N} =$$

$$\frac{a^2\alpha^2 b^2 + \alpha a^2\beta M - a^4\beta^2 - a^2\alpha^2 b^2}{\alpha N} : VR,$$

verwandelt, woraus folgt

$$VR = \frac{\alpha b^2 M - a^2\beta b^2}{N}.$$

---

*) Der Werth von y', welcher mit dem zweyten von y correspondirt, ist negativ genommen, weil y' unterhalb der Axe der Abcissen liegt.

**) In der That hat man, weil der Anfangspunct in A, weil AT $= \alpha$ und AB $= 0$ ist,

$$\text{Subtangete } PT = \frac{a^2 - AP^2}{AP};$$

folglich

$$PT + AP = \alpha = \frac{a^2 - AP^2}{AP} + AP;$$

also endlich

$$AP = \frac{a^2}{\alpha}.$$

Aber

$$p'm' = y'$$

hat genau zum Werth den von VR; also

$$VR = p'm';$$

es fällt daher der Punct V mit dem Puncte P zusammen, wo man auch übrigens den auf der gegebenen Geraden TT′ gewählt haben mag, um den Durchschnitt der Tangenten TM′, T′m′ darzustellen.

Wenn die Ellipse sich in einen Kreis verwandelte, so würde der Satz deshalb nicht minder wahr seyn; denn der Kreis ist, wie man weiß, nur eine Ellipse, deren Axen gleich sind; und durch eine der eben gebrauchten durchaus ähnlichen Analysis gelangt man zum Beweise eben dieses Satzes für den Fall der beyden andern Curven der zweyten Ordnung. Man bemerkt indessen gleich, daß, weil die Parabel von einem Mittelpuncte entblößt ist, es nothwendig seyn würde, den Anfangspunct der Coordinaten auf einen Punct der Curve überzutragen. Man wird in dieser Hinsicht die Gleichung der Parabel.

$$y^2 = px,$$

und die im §. 18. für ihre Tangente erhaltene

$$y = \frac{px - \alpha p}{2\beta}$$

anbringen. Nimmt man dann diese beyden Gleichungen, um daraus die Coordinaten der Berührungspuncte M′m′ (Fig. 26.) herzuleiten, so wird man haben

$$X' = \left(\alpha + \frac{2\beta^2}{p}\right) + \frac{2\beta}{p} \sqrt{(\alpha p + \beta^2)} = N' + \frac{2\beta M'}{p}$$

$$x' = \left(\alpha + \frac{2\beta^2}{p}\right) - \frac{2\beta}{p} \sqrt{(\alpha p + \beta^2)} = N' - \frac{2\beta M'}{p}$$

$$Y' = \beta + \sqrt{(\alpha p + \beta^2)} = \beta + M'$$

$$y' = -\beta + \sqrt{(\alpha p + \beta^2)} = -\beta + M'.$$

Weil nun die Puncte M′, V, m′ in gerader Linie gedacht werden müssen, so muß man wie im Vorhergehenden die Proportion haben

$$X' - x' : Y' + y' = \alpha - x' : RV,$$

oder in analythischen Werthen

$$\frac{4\beta M'}{p} : 2M' = \frac{-2\beta^2}{p} + \frac{2\beta M'}{p} : RV,$$

woraus man zieht

$$RV = -\beta + M' = y' = RP;$$

die vorgetragene Eigenschaft ist also allen Curven der zweyten Ordnung gemein.

Man könnte vielleicht geneigt seyn zu glauben, daß unser Beweis wesentlich auf der Bedingung der Perpendicularität der Linien AX, TT′ beruht; erinnert man sich indessen an das, was im §. 23. gesagt worden, so kann die Linie TT′ auf die Axe schief fallen, ohne daß die Folgerungen von denen verschieden werden, welche wir daraus gezogen haben. Man muß nur das System der Coordinaten auf die Durchmesser der Curven der zweyten Ordnung dergestalt übertragen, daß die Ordinaten der Linie TT′ parallel seyen.

Was den Beweis des umgekehrten von dem uns beschäftigenden Satze betrift, so glauben wir, daß diese Vorbereitungen hinreichend sind, um ihn mit Vortheil

selbst ausführen zu können. Es würde der Entwickelung ihrer Geistesfähigkeit nachtheilig seyn, wenn wir uns sehr über das Detail und der Anwendung der Methoden auslassen wollten.

Aufgabe.

§. 42.

Wenn zwey Puncte B, C Fig. 27. der Lage nach gegen einen bekannten Kreis gegeben sind, auf dem Umkreise einen Punct M zu finden, von welchem nach dem Mittelpuncte A, und nach den gegebenen Puncten die Geraden AM, MB, MC geführt, diese mit einander zwey Winkel AMB, AMC einschließen, deren Sinus sich wie m : n verhalten.

Man verbinde die gegebenen Puncte durch die Gerade BC, und vom Puncte A, dem Mittelpuncte des gegebenen Kreises fälle man auf diese Gerade die senkrechte AY, welche man für die Axe der Ordinaten nehme, und führe die Gerade AX der BC parallel, welches nicht ermangeln kann den Calcul zu vereinfachen. Endlich fälle man von den Puncten B, C auf AX die senkrechten BH, CK.

Nun seyen

$$AH = \alpha, \quad AK = \alpha', \quad BH = CK = \beta,$$

und x, y die Coordinaten des gesuchten Punctes M.

Auflösung.

Die Gerade BM, welche durch einen Punct B gehen muß, dessen Coordinaten α, β sind, bildet mit der

Axe der Abcissen einen Winkel, dessen Tangente A zum Ausdrucke hat.

$$A = -\frac{\beta - y}{\alpha + x}.$$

Eben so bildet die Gerade MG mit der Axe AX einen Winkel, dessen Tangente

$$A' = \frac{\beta - y}{\alpha' - x}$$

ist.

Endlich wird die Tangente A″ des von der Geraden AM und der Axe der Abcissen gebildeten Winkels durch

$$A'' = \frac{y}{x}$$

ausgedrückt seyn. Nun hat nach §. 13. der Sinus des von den beyden Geraden AM, MQ gebildeten Winkels M′MC zum Ausdruck

$$\frac{(A'' - A')}{\sqrt{(1 + A'^2)}\sqrt{(1 + A''^2)}},$$

wo hier a′ und a durch A″, A′ ausgedrückt sind.

Hieraus leiten wir her, daß Sinus CMA oder

$$\text{Sinus } M'MC = \frac{y(\alpha' - x) - x(\beta - y)}{\sqrt{[(\alpha' - x)^2 + (\beta - y)^2]}\sqrt{(x^2 + y^2)}}.$$

Aus eben dem Grunde erhält man, wenn man A statt A′ substituirt, und von den oben beygebrachten analytischen Ausdrücken Gebrauch macht,

sin BMA,

oder

$$\sin AMN = \frac{y(\alpha + x) + x(\beta - y)}{\sqrt{[(\alpha + x)^2 + (\beta - y)^2]}\sqrt{(x^2 + y^2)}}.$$

Aber nach dem Vortrage der Aufgabe muß man diese Proportion haben

$$\sin AMB : \sin AMC = m : n,$$

woraus folgt

$$m \sin AMC = n \sin AMB.$$

Setzt man in diese Gleichung statt Sinus AMC und Sinus AMB ihre oben berechnete Werthe, so erhält man, nachdem sie von den Nennern befreyet und vereinfacht worden sind

$$(\alpha' ny - \beta nx \sqrt{[(\alpha + x)^2 + (\beta - y)^2]}$$
$$= (\alpha my + \beta mx) \sqrt{[(\alpha' - x)^2 + (\beta - y)^2]} \ldots . (1);$$

hält man diese Gleichung gegen die des gegebenen Kreises

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

so würde man zu einer Gleichung vom sechsten Grade in x gelangen, und wendet man das Verfahren des §. 159. L, C an, so würde man die Abcisse AP des gesuchten Punctes erhalten *). Zu diesem Resultat ist Descartes im 65sten seiner Briefe, 3ter Theil, gelangt. Es ist merkwürdig, daß die Auflösung der gegenwärtigen Aufgabe, selbst für den Vortrag dieser Aufgabe, auf eine sehr einfache Art gegeben ist.

Drey Puncte A, B, C Fig. 28. **sind gegeben; auf den Entfernungen** AB, BC **als Durchmesser genommen, seyen Umkreise beschrieben, und aus dem**

*) Es wird vielleicht nicht überflüßig seyn hier anzumerken, daß die Wurzeln der Gleichung (1) vermittelst der Gleichung (2) einer Vereinfachung fähig ist; und daher rührt es auch, daß die Endgleichung in x nur vom sechsten Grade ist.

dem Puncte A so viele Sehnen AD, AE als man will geführt, die aber immer ein und dasselbe Verhältniß zu einander haben; man will nun die Natur der Curve wissen, auf welcher sich die Durchschnittspuncte M der Geraden EC, BD befinden.

Wendet man unsre Analysis auf diese Aufgabe gehörigermaaßen an, und nimmt AD und AE in dem Verhältniß von m : n, das heißt von sin AMB : sin AMC, so würde man auf die Gleichung (1) zurück kommen, woraus folgt, daß wenn der Durchschnitt der Geraden EC, DE sich auf dem gegebenen Umkreis darstellen sollte, der Punct M dem ersten Satze ein Genüge leistet; und dieses ist ohne irgend eine Rechnung leicht einzusehen.

Aufgabe.

§. 43.

Wenn ein Punct M in einem bekannten Winkel BAX der Lage nach gegeben ist, die Coordinaten des Mittelpunctes eines Kreises zu finden, welcher die Gerade AX berührt, und die Seite AB dergestalt schneidet, daß der im Kreise liegende Theil mm′ von einer gegebenen Größe sey.

Es seyen Fig. 29. α, β die Coordinaten des Punctes M;

$$mm' = 2p;$$

die Tangente des Winkels BAX = a.

Es seyen überdieß

$$\left.\begin{matrix}\alpha' \\ \beta'\end{matrix}\right\} \qquad \left.\begin{matrix}x \\ y\end{matrix}\right\} \qquad \left.\begin{matrix}x' \\ y'\end{matrix}\right\}$$

Die Coordinaten der Puncte

M' m m';

und da der Kreis die AX berühren muß, so wird sein Halbmesser gleich β' seyn.

Auflösung.

Die Gleichung des gesuchten Kreises fur irgend einen Punct seines Umfangs ist (§. 15.)

$$(x-\alpha')^2+(y-\beta')^2=\beta'^2 \; .... (1)$$

und für den gegebenen Punct

$$(\alpha-\alpha')^2+(\beta-\beta')^2=\beta'^2 \; .... (2);$$

ferner ist die Gerade AB durch

$$y=ax \; .... (3)$$

gegeben, und in Rücksicht des Abstandes mm' hat man

$$4p^2=(x'-x)^2+(y'-y)^2 \; .... (4).$$

Da alle Bedingungen der Aufgabe in Gleichungen ausgedrückt sind, und da es dieser letztern eine hinreichende Anzahl giebt, um die unbekannten zu bestimmen, so wird man eine Endgleichung in α' oder in β' erhalten. Dieses ist das Detail der Elimination.

Werden die Gleichungen (1) und (3) gegen einander gehalten, so werden sie die Werthe von x, y und von x', y' bestimmen, das heißt die Coordinaten der Durchschnittspuncte m, m', weil im Allgemeinen eine gerade Linie den Umkreis nur in zweyen Puncten treffen kann. Man findet in der That

$$x=\frac{a\beta'+\alpha'\pm V(a^2\beta'^2-a^2\alpha'^2+2a\alpha'\beta)}{1+a^2}$$

und

$$y=\frac{a\alpha'+a^2\beta'\pm aV(a^2\beta'^2-a^2\alpha'^2+2a\alpha'\beta')}{1+a^2},$$

Wenn man nun die Werthe dieser Ausdrücke in Beziehung auf die obern Zeichen durch x, y bezeichnet, und durch x′, y′ die Werthe nach den untern Zeichen genommen, so wird man haben, nachdem x, y und x′, y′ aus der Gleichung (4) eliminirt, und die Nenner hinweg geschafft worden

$$4p^2 (a^2+1)^2 =$$
$$4a^2\beta'^2(a^2+1) - 4a^2\alpha'^2(a^2+1) + 8a\beta'(a^2+1)\alpha',$$

oder, wenn man vereinfacht und zur Abkürzung

$$a^2 + 1 = m^2$$

setzt, wird man finden

$$p^2m^2 = a^2\beta'^2 - a^2\alpha'^2 + 2a\alpha'\beta' \text{ *)}.$$

Trägt man nun das Glied $a^2\alpha'^2$ in den ersten Theil über, und setzt zu beyden Seiten α'^2 hinzu, so wird man haben

$$p^2m^2 + \alpha'^2(a^2+1) = a^2\beta'^2 + 2a\alpha'\beta' + \alpha'^2.$$

---

*) Man würde sogleich zu diesem Resultate gelangen, wenn man von dieser Betrachtung ausginge, daß im Kreise jede vom Mittelpuncte M′ auf eine Sehne mm′ gefällte senkrechte M′N diese Sehne halbirt. In der That wird, da die Coordinaten des Punctes M′ durch α' und β' bezeichnet sind, der Ausdruck der senkrechten M′N nach §. 12. seyn $-\frac{\beta - a\alpha}{\sqrt{(1+a^2)}}$ oder $\frac{a\alpha - \beta}{\sqrt{(1+a^2)}}$; und da $mN = p$ und $mM' = \beta'$, so wird das rechtwinklichte Dreyeck mNM′ zwischen seinen Seiten diese Beziehung darbiethen $\frac{(a\alpha - \beta')^2}{1+a^2} + p^2 = \beta'^2$; welche, wenn sie entwickelt wird, mit dem Resultate, worauf es hier ankommt, völlig identisch ist.

Zieht man endlich die Quadratwurzel und erwägt man, daß $a^2 + 1 = m^2$, so wird kommen

$$m\sqrt{(\alpha'^2 + p^2)} = a\beta' + \alpha'.$$

Aus der Gleichung (2) zieht man, wenn $\alpha^2 + \beta^2$ durch γ^2 bezeichnet wird,

$$\beta' = \frac{\gamma^2 + \alpha'^2 - 2\alpha\alpha'}{2\beta}.$$

Substituirt man diesen Werth in die vorhergehende Gleichung, so wird daraus erfolgen, nachdem man das Wurzelzeichen und den Nenner hinweg geschaft, und nach der unbekannten α' geordnet hat

$$a^2\alpha'^4 + \left.\begin{array}{l} 4a\beta \\ -4a^2\alpha \end{array}\right| \alpha'^3 + \left.\begin{array}{r} 4(\beta^2 - 2a\alpha\beta + a^2\alpha^2) \\ +2a^2\gamma^2 \\ -4\beta^2m^2 \end{array}\right| \alpha'^2,$$

$$\left.\left.\begin{array}{r} +4a\beta\gamma^2 \\ -4a^2\alpha\gamma^2 \end{array}\right| \alpha' + \begin{array}{l} a^2\gamma^4 \\ -4\beta^2m^2p^2 \end{array}\right\} = 0,$$

woraus man sieht, daß der Werth der Abcisse α' des gesuchten Berührungspunctes von einer Formel vom vierten Grade abhängt; um aber dieser Formel eine etwas einfachere Form zu geben, wollen wir zuvörderst alle ihre Glieder homogen machen, indem wir überall, wo es nöthig ist, die Potenzen der Einheit ersetzen, welche willkührlich genommen werden kann (§. 95. L. C.). In dieser Hinsicht sey $1 = \alpha$, so hat man vermöge des Gesetzes Homogenität

$$\left.\begin{array}{l} a^2\alpha'^4 + 4(a\alpha\beta - a^2\alpha)\alpha'^3 \\ +\left.\begin{array}{r} 4(\alpha\beta - a\alpha)^2 \\ +2a^2\gamma^2 \\ -4\beta^2m^2 \end{array}\right\} \alpha'^2 + 4\gamma^2(a\alpha\beta - a^2\alpha)\alpha' + \begin{array}{l} a^2\gamma^4 \\ -4\beta^2m^2p^2 \end{array} \end{array}\right\} = 0;$$

dividirt man alles durch a^2, und setzt man mehrerer Einfachheit wegen

$$\frac{\alpha\beta}{a} = e, \quad \frac{\beta m}{a} = f,$$

so wird endlich kommen

$$\left.\begin{array}{l}\alpha'^4 + 4(e-\alpha)\alpha'^3 \\ + 4(e-\alpha)^2 \\ + 2\gamma^2 \\ - 4f^2\end{array}\right\} \alpha'^2 + 4\gamma^2 (e-\alpha)^2 \alpha' + \left.\begin{array}{l}\gamma^4 \\ -4f^2p^2\end{array}\right\} = 0.$$

Es ist sehr merkwürdig, daß diese letztere auf einen wirklich analytischen Weg erhaltene Gleichung mit der einerley ist, zu welcher andre Schriftsteller vermittelst einiger Vorbereitungs-Constructionen gelangt sind (S. über diesen Gegenstand die Geometrie von Bossut Seite 315.). Noch mehr, diese Constructionen, die man zuerst erfinden mußte, sind selbst durch die Werthe von e und f angezeigt; denn wenn man durch den gegebenen Punct den Geraden AF, AP respectiv die Parallele DM, ME zieht, so werden die Theile DP, AE zum Ausdruck haben

$$\frac{\alpha\beta}{a} \text{ und } \frac{\beta m}{a};$$

wo die Linie PF immer als die Tangente des Winkels A betrachtet wird. Diese Uebereinstimmung der Resultate ist also ein Beweis von der Allgemeinheit der Methode, die wir angenommen haben.

Dritter Abschnitt.

Von den unbestimmten Aufgaben.

Die Analysis der Sätze, welche den Gegenstand des vorhergehenden Abschnitts ausmachen, führt immer auf so viele Gleichungen als Größen zu entdecken sind; wenn aber das Gegentheil eintritt, so enthält die aus der möglichsten Elimination der unbekannten erfolgende Endgleichung, nothwendigerweise deren mehrere; und da man keine der übrig bleibenden bestimmen kann, ohne vorher jeder der andern irgend einen Werth beyzulegen, so wird die auf diesen Umstand führende Aufgabe eine unbestimmte genannt. Wenn die Auflösung einer solchen Aufgabe auf eine Gleichung führt, welche nur zwey unbekannte oder veränderliche Größen enthält, so ist die Curve, zu welcher diese Gleichung gehört, immer eben, oder von einfacher Krümmung; von diesen soll jetzt gehandelt werden.

Aufgabe.

§. 44.

Eine Gerade und ein Punct außerhalb dieser Geraden sind der Lage nach in Rücksicht auf zwey rechtwinklichte Axen gegeben; die Gleichung der Geraden zu finden, welche durch diesen Punct geht, und mit der gegebenen Geraden einen bekannten Winkel bildet.

Es seyen α und β die Coordinaten des gegebenen Punctes M Fig. 30.

$$y = ax + b$$

die Gleichung der bekannten Geraden CB, und t die Tangente des gegebenen Winkels.

Auflösung.

Die Gleichung der gesuchten Geraden MQ ist

$$y - \beta = a' (x - \alpha);$$

da ferner der Winkel MQB dem gegebenen Winkel gleich seyn muß, dessen Tangente t ist, so wird man vermöge §. 14. haben

$$\frac{a' - a}{aa' + 1} = t;$$

zieht man den Werth der unbekannten aus, so wird man erhalten

$$a' = \frac{t + a}{1 - at},$$

und alsdann wird die Gleichung der Geraden MQ seyn

$$y - \beta = \left(\frac{t + a}{1 - \alpha t}\right)(x - \alpha).$$

Wollte man statt des Winkels MRP noch einen andern Punct der Geraden MR, als M, zum Beyspiel den Punct R haben, so würde man in der vorhergehenden Gleichung $y = 0$ setzen, und es würde für die Abcisse AR erfolgen

$$x = \alpha - \frac{\beta (1 - at)}{a + t}.$$

Wenn die gesuchte Gerade zwischen P und X gehen muß, so muß man, um mit der Betrachtung des §. 14. in Uebereinstimmung zu kommen, die Gleichung

$$\frac{a' + a}{1 - a'a} = b$$

anbringen.

Aufgabe.

§. 45.

Wenn ein Winkel gegeben ist, einen Punct von der Beschaffenheit zu finden, daß die von demselben auf die Schenkel des Winkels gefällten senkrechten sich wie m : n verhalten.

Es seyen x', y' die Coordinaten des gesuchten Punctes M, und a die Tangente des Winkels MAB Fig. 31.

Auflösung.

Die Gleichung der Geraden AM ist

$$y = ax,$$

und die vom Puncte M′ auf AM gefällte senkrechte MM′ hat zum Ausdruck

$$-\frac{y' - ax'}{\sqrt{(1 + a^2)}};$$

also muß man nach der erforderlichen Bedingung die Proportion haben

$$\frac{ax' - y'}{\sqrt{(1 + a^2)}} : y' = m : n,$$

welches giebt

$$n(ax' - y') = my' \sqrt{(1 + a^2)},$$

woraus man zieht

$$y' = \frac{nax'}{n + m\sqrt{(1 + a^2)}},$$

Wenn der Punct M′ oberhalb der Geraden AM liegen sollte, so würde die senkrechte MM′ positiv seyn (§. 12.), und man würde dann haben

$$y' = \frac{nax'}{n - m\sqrt{(1 + a^2)}}.$$

Es giebt also eine unendliche Anzahl Puncte, welche der Aufgabe ein Genüge thun, und ferner liegen alle diese Puncte auf einer Geraden, welche durch den Anfangspunct der Coordinaten geht, und mit der Axe der Abcissen einen Winkel einschließt, dessen trigonometrische Tangente ist

$$\frac{na}{n \pm m\sqrt{(1 + a^2)}}.$$

Diese Größe läßt sich folgendermaßen leicht construiren, wenn man zur Abkürzung nur das untere Zeichen der Wurzelgröße in Erwägung zieht.

Aus dem Scheitel A des gegebenen Winkels Fig. 32. errichte man auf AB die senkrechte AD dem n gleich, und aus eben demselben Punct A errichte man auf AC die senkrechte AD′ dem m gleich; alsdann führe man durch die Puncte D, D′ die Geraden DM′, D′M′ respectiv den Geraden AB, AC parallel, und verbinde den Durchschnittspunct M′ der erstern Geraden mit dem Puncte A; so wird die unbegränzte Gerade AM′ die gesuchte seyn.

Um sich von der Richtigkeit dieser Construction zu überzeugen, bemerke man, daß der Winkel D′AE = dem Winkel CAB, weil beyde den Winkel EAC zum Complement haben, woraus folgt (§. 2.), daß D′E = am,

und daß die Hypothenuse AE $= \sqrt{(a^2m^2 + m^2)} = m\sqrt{(a^2+1)} = QM'$.

Es ist ferner klar, daß man, weil $P'Q = P'M' = QM'$ haben muß

$$P'Q = n - m\sqrt{(1 + a^2)}.$$

Dieses vorausgesetzt, ist die Gleichung der, der Geraden AC parallelen D'M'

$$y = ax + m\sqrt{(1 + a^2)},$$

und die der, der Axe AB parallelen Geraden DM', ist $y = n$; aus diesen beyden letztern Gleichungen zieht man also für die Abscisse AP' des Durchschnittspunctes M'

$$x = \frac{n - m\sqrt{(1 + a^2)}}{a}.$$

und da die Tangente des Winkels M'AB $= \frac{P'M'}{AP'}$, so wird man haben, wenn man die analytischen Ausdrücke anbringt,

$$\frac{P'M'}{AP} = \frac{na}{n - m\sqrt{(1 + a^2)}},$$

woraus folgt, daß die Gleichung der Geraden AM' ist

$$y = \frac{nax}{n - m\sqrt{(1 + a^2)}}.$$

§. 46.

Aus der vorhergehenden Auflösung leitet man als unmittelbare Folge die Art her, einen Punct zu finden, von welchem auf drey der Lage nach gegen einander gegebenen Linien, senkrechte gefällt, diese senkrechten

in den bekannten Verhältnissen von m : n : p stehen sollen. Die Construction, die zur gegenwärtigen Aufgabe erforderlich ist, läßt sich folgendermaßen bewerkstelligen.

Es seyen AB, AC, CD Fig. 33. die gegebenen Geraden; so bestimme man nach dem eben befolgten Verfahren die Richtung der Geraden AM dergestalt, daß die senkrechten MN, NP in dem Verhältniß von m : n seyen. Man bestimme desgleichen die Richtung der Geraden MC dergestallt, daß die senkrechten MP, MQ in dem Verhältniß von n : p stehen; so wird der Durchschnittspunct M der Geraden AM, MC der Punct seyn, welcher allein der verlangten Bedingung ein Genüge leistet.

Aufgabe.

§. 47.

Es sind so viele Puncte als man will auf einer Ebne durch ihre rechtwinklichte Coordinaten gegeben; man soll eine gerade Linie dergestalt hindurch ziehen, daß wenn von diesen Puncten auf diese Gerade senkrechte gefällt werden, die Summe der senkrechten auf der einen Seite der der senkrechten auf der andern gleich sey.

Wir wollen mehrerer Einfachheit wegen annehmen, daß die Anzahl der gegebenen Puncte nur drey sey; die bey diesem Fall angebrachten Betrachtungen lassen sich dann leicht auf eine größere Anzahl von Puncten ausdehnen:

Es seyen Fig. 34.

$$\left.\begin{matrix}\alpha, \beta \\ \alpha', \beta' \\ \alpha'', \beta''\end{matrix}\right\}\text{ die respectiven Coordinaten der Puncte }\left\{\begin{matrix}M \\ M' \\ M''.\end{matrix}\right.$$

Auflösung.

Da diese Aufgabe offenbar unbestimmt ist, so wollen wir annehmen, daß CD eine von der Geraden sey, welche der Aufgabe ein Genüge thun, und daß sie zur Gleichung habe

$$y = ax + b.$$

Da die Linien pM, p'M', p''M'' auf dieser Geraden senkrecht seyn müssen, so werden ihre Längen respectiv seyn

$$\frac{\beta - a\alpha - b}{\sqrt{(1 + a^2)}}, \quad \frac{\beta' - a\alpha' - b}{\sqrt{(1 + a^2)}}, \quad - \frac{\beta'' - a\alpha'' - b}{\sqrt{(1 + a^2)}},$$

indem man die unterhalb CD liegenden senkrechten negativ nimmt.

Vermöge des Vortrags der Aufgabe wird man also haben

$$\beta' - a\alpha - b + \beta' - a\alpha' - b = b + a\alpha'' - \beta'',$$

welches giebt

$$a = \frac{\beta + \beta' + \beta'' - 3b}{\alpha + \alpha' + \alpha''}.$$

Da diese Größe zwey unbekannte a und b enthält, so kann man keine derselben erhalten, ohne der andern einen Werth beyzulegen. Es sey daher b = 0, so wird man für die mit diesem Falle übereinstimmende Auflösung haben

$$a = \frac{\beta + \beta' + \beta''}{\alpha + \alpha' + \alpha''}.$$

Wenn einer der Puncte M unterhalb der Axe der Abcissen liegen sollte, so müßte man diesen Umstand dadurch anzeigen, daß man die Ordinate dieses Punctes in dem Ausdruck der correspondirenden senkrechten negativ nimmt.

Aufgabe.

§. 48.

Wenn irgend eine Anzahl Puncte gegeben ist, irgend einen von der Beschaffenheit zu finden, daß wenn man von demselben nach jedem andern eine gerade Linie zieht, die Summe der Quadrate dieser Geraden, einem gegebenenen Quadrate q^2 gleich sey.

Wir wollen, um die Rechnungen zu vereinfachen, annehmen, man habe nur drey gegebene Puncte, durch welche Einschränkung die Allgemeinheit der Auflösung gegenwärtiger Aufgabe nichts verlieren wird, und die Coordinaten der Puncte

A, A', A'' Fig. 35.

wollen wir durch

$$\left.\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix}\alpha'\\ \beta'\end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix}\alpha''\\ \beta''\end{matrix}\right\}$$

bezeichnen.

Es seyen ferner x, y die Coordinaten des gesuchten Punctes M.

Auflösung.

Nach der Annahme in der Figur wird man haben

$$AM^2 = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2$$
$$A'M^2 = (x - \alpha')^2 + (y - \beta')^2$$
$$A''M^2 = (x - \alpha'')^2 + (y - \beta'')^2.$$

Entwickelt man diese Gleichungen und setzt ihre Summe gleich q^2, so erhält man, nachdem durch 3 dividirt worden

$$y^3 - \tfrac{2}{3}(\alpha + \alpha' + \alpha'')x + x^2 - \tfrac{2}{3}(\beta + \beta' + \beta'')y$$
$$= \frac{q^2 - (\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 + \beta^2 + \beta'^2 + \beta''^2)}{3}.$$

Diese Gleichung ist sehr merkwürdig; denn sie zeigt an, daß alle Puncte, welche der Aufgabe ein Genüge thun, auf dem Umkreise eines Zirkels liegen; und ferner ist der Mittelpunct dieses Kreises genau der Mittelpunct der parallelen Kräfte, die einander gleich und in den gegebenen Puncten A, A', A'' rc. angebracht, angenommen werden.

Denn um den Anfangspunct der Coordinaten in den Mittelpunct der Curve überzutragen, muß man in der vorhergehenden Gleichung $x' + \frac{\alpha + \alpha' + \alpha''}{3}$ statt x setzen, und $y' + \frac{\beta + \beta' + \beta''}{3}$ statt y; alsdann wird die erfolgende zusammengesetzte nur noch die zweyten Potenzen der veränderlichen Größen enthalten, und die völlig bekannte Größe wird der Ausdruck für den Halbmesser des zu construirenden Kreises seyn. Nachdem man also eine Abcisse gleich $\frac{\alpha + \alpha' + \alpha''}{3}$, und eine correspondirende Ordinate gleich $\frac{\beta + \beta' + \beta''}{3}$ genommen; wird der äußer-

ste Punct dieser Ordinate zugleich der Mittelpunct des Kreises in der Aufgabe, und der Mittelpunct der Schwere der Puncte A, A′, A″ ꝛc. seyn.

Dieser Satz, welcher einer von denen der loca plana des Apolonius ist, kann auf eine unendliche Anzahl verändert werden; allein bey allen Modificationen biethet er analoge Folgerungen dar, als die von denen eben geredet worden. Man sehe über diesen Gegenstand, die Geschichte der Mathematik von Montucla, 1. Theil Seite 284, 2te Ausgabe.

Aufgabe.

§. 49.

Wenn ein Punct in Rücksicht auf zwey auf einander senkrechte Axen gegeben ist, den Ort der Mittelpuncte aller Kreise zu bestimmen, welche durch diesen Punct gehen, und zugleich eine der Axen berühren.

Es seyen Fig. 36. α, β die Coordinaten des gegebenen Punctes M; x′, y′ die des Mittelpunctes M′ des gesuchten Kreises, r der unbekannte Halbmesser.

Auflösung.

Da der Mittelpunct M′ eines der Kreise, die durch den Punct M gehen, und die Axe AY berühren müssen, eines Theils im Winkel YAX liegt, so wird die Gleichung des Umkreises seyn

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 = r^2,$$

und für den Punct M dieses Umkreises hat man

$$(\alpha - x')^2 + (\beta - y')^2 = r^2;$$

da aber die Bedingung der Berührung des gegebenen Kreises mit der Axe AY durch $r = x'$ ausgedrückt ist, so hat man

$$(\alpha - x')^2 + (\beta - y')^2 = x'^2;$$

entwickelt und ordnet man, so kommt

$$y'^2 - 2\beta y' - 2\alpha x' + \alpha^2 + \beta^2 = 0;$$

die parabolische Curve ist also der Lauf der Mittelpuncte der Kreise, die mit der vorgetragenen Eigenschaft behaftet sind.

Wenn $\beta = 0$, oder, welches einerley ist, wenn die Axe der Abcissen durch den gegebenen Punct geht, hat man schlechtweg

$$y'^2 = 2\alpha x' - \alpha^2.$$

Um den Scheitel der Parabel zu finden, setze man in dieser letztern Gleichung $y = 0$, und man wird haben

$$x = \frac{\alpha}{2}.$$

Der kleinste Kreis, welcher dem Vortrage der Aufgabe ein Genüge thut, hat also zum Halbmesser die Hälfte der Abcisse des gegebenen Punctes.

Aufgabe.

§. 50.

Wenn eine Gerade der Lage nach gegen einen Kreis gegeben ist, den Zug der Mittelpuncte aller Kreise zu finden, welche zugleich den Kreis und die gegebene Gerade berühren.

Es sey AX Fig. 37. die gegebene Linie; vom Mittelpuncte C fälle man auf diese Linie eine senkrechte AC,

welche

welche für die Axe der Ordinaten genommen werden kann, und es seyen

$$AC = b, \quad AP' = x', \quad P'C' = y';$$

r der Halbmesser CR des gegebenen Kreises.

Auflösung.

Der Abstand CC' wird in einer Function der Coordinaten seiner äußersten Puncte durch

$$(r + y')^2 = (b - y')^2 + x'^2.$$

Verrichtet man die angezeigten Entwickelungen, so erhält man nach gemachter Reduction

$$x'^2 = 2(b + r)\,y' - (b^2 - r^2);$$

wenn $x' = 0$ hat man

$$y' = \frac{b^2 - r^2}{2(b + r)} = \frac{b - r}{2},$$

woraus folgt, daß für den Fall der Figur, der Mittelpunct des kleinsten berührenden Kreises auf der Mitte des Abstandes der gegebenen Geraden und des gegebenen Kreises liegt. Es kann sich zutragen, daß dieser letztere Kreis von der Geraden AX geschnitten oder berührt wird, welches verschiedene Fälle darbiethet, die leicht zu behandeln sind.

Aufgabe.

§. 51.

Durch zwey gegebene Puncte zwey auf einander senkrechte Linien zu führen.

Es seyen Fig. 38.

$\left.\begin{matrix}\alpha, \beta \\ \alpha', \beta'\end{matrix}\right\}$ die Coordinaten der Puncte $\left\{\begin{matrix}M \\ M'.\end{matrix}\right.$

Auflösung.

Die Gleichung der Geraden MN, welche unterworfen ist durch einen gegebenen Punct zu gehen, und mit der Axe der Abcissen irgend einen Winkel zu bilden, ist

$$y - \beta = A\,(x - \alpha);$$

die Gleichung der Geraden M′N′, die darauf senkrecht seyn soll, ist

$$y - \beta' = -\frac{1}{A}\,(x - \alpha').$$

damit nun der Punct M″ den beyden vorgelegten Geraden gemein sey, müssen x und y in den Gleichungen dieser Geraden dieselben Werthe haben. Nächst dieser Annahme eliminire man die Tangente A, und man wird haben

$$(y - \beta)\,(y - \beta') = (\alpha' - x)\,(x - \alpha),$$

oder, wenn man entwickelt und alle Glieder in den ersten Theil bringt

$$y^2 + x^2 - (\beta' + \beta)\,y - (\alpha' + \alpha)\,x + \alpha\alpha' + \beta\beta' = 0.$$

Da diese Gleichung, die des Kreises zwischen seinen Coordinaten ist, so folgt, daß es eine unendliche Anzahl Puncte giebt, von denen nach den gegebenen Puncten M, M′ Gerade geführt, diese Geraden einen Quadranten einschließen werden.

Wenn $\alpha = \beta = \beta' = 0$, das heißt, wenn die Axe der Abcissen durch die beyden gegebenen Puncte geht, und der Anfangspunct in M ist, so wird die Endgleichung

$$y^2 - \alpha' x + x^2 = 0;$$

hier ist indessen eine andre Aufgabe, von welcher diese nur ein besondrer Fall ist.

§. 52.

Durch zwey gegebene Puncte zwey Gerade zu führen, welche mit einander einen bekannten Winkel einschließen.

Es sey Fig. 9. t die Tangente des gegebenen Winkels, und wir wollen annehmen, welches immer möglich ist, daß die Puncte A, P′ auf der Axe der Abcissen liegen. Es sey überdieß AP′ = α′.

Auflösung.

Die Gerade AM, welche durch den Anfangspunct geht, hat zur Gleichung

$$y = ax;$$

und die durch einen auf der Axe genommenen Punct gehende Gerade P′M ist

$$y = -a'(x - \alpha).$$

Andrerseits wird, da die Tangente des Winkels AMP′ durch t ausgedrückt ist, die Tangente des Supplements oder die des Winkels NMP′ durch — t ausgedrückt seyn; man wird also nach §. 14. haben

$$t = \frac{-a' - a}{1 - a'a},$$

woraus man zieht

$$a = \frac{t + a'}{a't - 1}.$$

Substituirt man diesen Werth in die Gleichung der Geraden AM, so wird kommen

$$y = \frac{(a' + t)\,x}{a't - 1}x;$$

und eliminirt man a′ vermittelst dieser und der Gleichung

der Geraden P′M, so gelangt man zu einer Beziehung bloß zwischen x, y; diese Beziehung ist

$$x^2 + y^2 - \alpha x - \frac{\alpha y}{t} = 0 \, (A),$$

und zeigt, daß alle gleiche Winkel AMP′ ihre Scheitel auf dem Umkreise eines Zirkels haben.

Wenn der gegebene Winkel AMP′ ein rechter ist, so ist seine Tangente t unendlich, und alsdann verschwindet das letzte Glied der Gleichung (A); so daß man nur hat

$$x^2 + y^2 - \alpha x = 0,$$

wie in der vorhergehenden Aufgabe.

Um noch einige Beyspiele von den Constructionen der unbestimmten Gleichungen zu geben, wollen wir zeigen, wie man bey den, welche wir durch (A) bezeichnet, zu verfahren habe. Man setze darin

$$x = x' + \frac{\alpha}{2},$$

und

$$y = y' + \frac{\alpha}{2t},$$

um den Anfangspunct der Coordinaten in den Mittelpunct der Curve überzutragen, und nachdem man die nöthigen Rechnungen ausgeführt, gelangt man zu

$$x'^2 + y'^2 - \frac{\alpha^2}{4} - \frac{\alpha^2}{4t^2} = 0.$$

Dieses ist die Gleichung des Zirkels auf den Mittelpunct zurückgebracht, wo dessen Halbmesser

$$\sqrt{\left(\frac{\alpha^2}{4} + \frac{\alpha^2}{4t^2}\right)}$$

ist. Das Mittel, diese Wurzelgröße zu construiren, ist leicht; denn man errichte aus der Mitte der Geraden AP die senkrechte $Pm = \frac{a}{2t}$, so wird der äußerste Punct m dieser senkrechten der Mittelpunct des gesuchten Kreises, und die Linie AM wird dessen Halbmesser seyn; welches offenbar ist.

Aus dieser Construction folgt, daß der Winkel AmP = dem Winkel AMP; denn die Gleichung der Geraden Am ist

$$y = \left(\frac{Pm}{AP}\right) x = \frac{1}{t} x.$$

da nun die Tangente des Winkels $mAP = \frac{1}{t}$, so wird dessen Cotangente, oder die Tangente des Winkels AmP = t seyn. Hieraus schließen wir, daß der Winkel am Mittelpuncte doppelt so groß ist, als der mit ihm auf einerley Bogen stehende Winkel am Umkreise, welches auch mit den geometrischen Betrachtungen übereinstimmt.

Aufgabe.

§. 53.

Wenn zwey Kreise der Größe und Lage nach in einer Ebne gegeben sind, den Lauf der Mittelpuncte aller Kreise zu finden, welche die beyden gegebenen Kreise zugleich berühren.

Wir wollen annehmen, daß Fig. 39. der gesuchte Kreis die beyden gegebenen Kreise umschließt, und die Coordinaten des Mittelpunctes des ersten Kreises durch x,

y, seinen Halbmesser durch z, den Abstand AA′ beyder andern Kreise von einander, wollen wir durch a, und die Halbmesser dieser Kreise durch r und r′ bezeichnen.

Auflösung.

Aus den Eigenschaften der rechtwinklichten Dreyecke APM, A′PM folgt, daß man einerseits hat

$$x^2 + y^2 = (z - r)^2$$

und andrerseits

$$y^2 + (a - x)^2 = (z - r')^2.$$

Entwickelt man diese Gleichungen, so werden sie

$$z^2 - 2rz + r^2 = x^2 + y^2$$
$$z^2 - 2r'z + r'^2 = a^2 - 2ax + y^2 + x^2.$$

Vergleicht man diese Gleichungen mit den Formeln vom zweyten Grade

$$z^2 + Pz + Q = 0$$
$$z^2 + P'z + Q' = 0,$$

welche bekanntlich zum Endresultat

$$(P - P')(PQ' - QP') + (Q - Q')^2 = 0 \quad (A)$$

geben, so wird man haben

$$P = -2r, \quad P' = -(2r'), \quad Q = -(x^2 + y^2 - r^2),$$
$$Q' = -(x^2 + y^2 - 2ax + a^2 - r'^2),$$

und wenn man diese Werthe in die Gleichung (A) einführt, so kann man ihr diese Form geben

$$\left.\begin{matrix} (8rr' - 4r'^2 - 4r^2 + 4a^2)x^2 + (8rr' \\ - 4r'^2 - 4r^2)y^2 + (4ar'^2 + 4ar^2 - 8arr' \\ - 4a^3)x + a^4 + 4a^2rr' - 2a^2r^2 - 4rr'^3 \\ + 6r^2r'^2 - 4r^3r' + r^4 + r'^4 - 2a^2r'^2 \end{matrix}\right\} = 0,$$

oder, wenn man alle Zeichen ändert und die Glieder in ihre Factoren zerfällt,

$$4(r-r')^2z^2+4[(r-r')^2-a^2]x^2-4a[(r-r')^2 - a^2]x = [(r-r')^2-a^2]^2.$$

Diese Gleichung ist die der Hyperbel, weil die Coefficienten von x^2 und von y^2 entgegengesetzte Zeichen haben. In der That hat man, weil $r-r' < a$, $4(r-r')^2 < 4a^2$.

Wenn aber $r-r'=a$, welches der Fall der Fig. 40. ist, so wird die Gleichung der hyperbolischen Curve, wenn man darin die angemessenen Reductionen macht, $y=0$.

Da dieses Resultat von x unabhängig ist, so zeigt es, daß für alle Puncte der Axe der Abcissen, die Ordinate des gesuchten Mittelpunctes Null, desgleichen $r=r'$ ist, und daß die Gleichung der Hyperbel dann wird

$$x^2-ax=-\frac{a^2}{4},$$

woraus man zieht

$$x=\frac{a}{2}.$$

Dieses zeigt an, wie man leicht erwarten kann, daß für jede Ordinate y die Abcisse immer beständig bleibt.

Wir können nicht unbemerkt lassen, daß man die Natur der gesuchten Curve weit leichter entdecken kann; denn da man einerseits hat $AM=z-r$, und von der andern Seite $A'M=z-r'$, so folgt daß

$$AM-A'M=(z-r)-(z-r')=r'-r.$$

Da dieses Resultat vom Halbmesser des gesuchten Kreises befreyet ist, so kann man daraus schließen, daß

die Differenz der Vektoren AM, A′M immer beständig ist, es sey daß der gesuchte Kreis die beyden gegebenen Kreise umschließe, oder daß er sie außerhalb lasse. Die Curve der Mittelpuncte in der Aufgabe ist also eine Hyperbel, welche zu Brennpuncten die Mittelpuncte der gegebenen Kreise selbst, und zur großen Axe die Differenz der Halbmesser hat.

Man kann auch überdieß die Scheitel der vorgelegten Hyperbel finden, ohne erst zur Uebertragung der Axen seine Zuflucht nehmen zu müssen. Denn in dem Puncte, wo die Hyperbel die Axe der Abcissen schneidet, ist die Ordinate Null; setzt man also in der Gleichung (A) $y = 0$, und dividirt alles durch den Coefficienten von x^2, so wird man haben

$$x^2 - ax = \frac{[(r-r')^2 - a^2]^2}{4[(r-r')^2 - a^2]} = \frac{(r-r')^2 - a^2}{4}.$$

Wenn diese Gleichung nach x aufgelöst wird, so wird man erhalten,

$$x = \frac{a}{2} \pm \left(\frac{r-r'}{2}\right).$$

Da der erste Werth von x mit der Abcisse AS′ Fig. 39. und der zweyte Werth mit der Abcisse AS übereinstimmt, so wird die große Axe SS′ der Hyperbel gleich seyn $r - r'$, und der Mittelpunct O wird auf der Mitte des Abstandes AA′ liegen. Ferner wird der hyperbolisch Ast πSQ derjenige seyn, auf welchem die Mittelpuncte der umschließenden Kreise liegen, so wie der Ast π'S′Q′ die Mittelpuncte aller derjenigen Kreise enthalten wird, welche die gegebenen Kreise außerhalb lassen.

Aufgabe.

§. 54.

Die Natur der Curve zu finden, welche alle Puncte enthält, von denen zwey einer gegebenen Parabel geführte Tangenten beständig einen gegebenen Winkel einschließen.

Es sey $y^2 = px$ die Gleichung der gegebenen Parabel, und wir wollen die Coordinaten der Berührungspuncte

M, M Fig. 41.

durch

$$\left.\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right\} \qquad \left.\begin{matrix}\alpha'\\ \beta'\end{matrix}\right\}$$

bezeichnen.

Es sey ferner t die Tangente des gegebenen Winkels.

Auflösung.

Die allgemeine Gleichung der durch einen auf der Axe AX' genommenen Punct T gehenden Geraden TM ist

$$y = A(x + \alpha) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Aus eben dem Grunde ist die der Geraden T'M'

$$y = -A'(x + \alpha') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

aber die Coordinaten des Durchschnittspunctes m dieser Geraden müssen in den Gleichungen (1) und (2) dieselben seyn; und da dieser Punct m auf der Seite der negativen Abcissen liegt, so muß man diesen Umstand berücksichtigen und x in — x verwandeln; die obigen Gleichungen werden alsdann

$$y = A(\alpha - x)$$
$$y = - A'(\alpha' - x);$$

da ferner $A = \frac{\beta}{2\alpha}$, und $A' = \frac{\beta'}{2\alpha'}$, so nehmen die vorhergehenden Gleichungen diese Form an

$$\left.\begin{array}{l} y = \frac{\beta}{2\alpha}(\beta - x) \\ y = \frac{-\beta'}{2\alpha'}(\alpha' - x) \end{array}\right\} \ldots\ldots (3).$$

Endlich zieht man aus den Gleichungen $\beta^2 = \alpha p$, $\beta'^2 = \alpha' p$, welche zu den Berührungspuncten gehören, diese Werthe

$$\alpha = \frac{\beta^2}{p}, \quad \alpha' = \frac{\beta'^2}{p} \ldots\ldots (4).$$

welche, in die Gleichungen (3) substituirt, geben

$$2\beta y = - px + \beta^2$$
$$2\beta' y = px - \beta'^2,$$

woraus man zieht

$$\beta = y \pm \sqrt{(px + y^2)}$$
$$\beta' = -y \pm \sqrt{(px + y^2)}.$$

Ferner ist der Winkel $MmM' = MTA + AT'M'$; man hat also (§. 14.)

$$t = \frac{A + A'}{1 - AA'} = \frac{2\alpha\beta' + 2\alpha'\beta}{4\alpha\alpha' - \beta\beta'}.$$

Substituirt man in dieses Resultat statt α und α' ihre durch die Gleichungen (4) gegebene Werthe, so kommt, wenn man den Nenner hinweg schafft,

$$4\beta\beta' t - p^2 t = 2\beta p + 2\beta' p,$$

setzt man überdieß in dieser statt β und β' ihre im Vor-

hergehenden erhaltene Werthe, so kommt, wenn man alles durch p dividirt

$$4tx - pt = 4\sqrt{(px + y^2)}.$$

Erhebt man beyde Theile zum Quadrat, um das Wurzelzeichen hinweg zu schaffen, so wird man endlich haben

$$y^2 + \left(\frac{pt^2}{2} + p\right)x - t^2x^2 - \frac{p^2t^2}{16} = 0 \ (A),$$

eine Gleichung der Hyperbel, weil ihre Form sich offenbar auf die Formel $\alpha u^2 - \beta t^2 + \iota t = \zeta$ bringen läßt, die diese Curve darstellt (§. 16.).

Um nun den Anfangspunct in den Mittelpunct der Hyperbel überzutragen, und folglich der vorhergehenden Gleichung die Form $y'^2 = \frac{b^2}{a^2}(x'^2 - a^2)$ zu geben, schaffe man das Glied weg, in welchem sich x auf der ersten Potenz findet, indem man in der Gleichung der Curve $x' + q$ statt x setzt; es ist aber aus der Theorie der Gleichungen bekannt, daß man in dergleichen Fällen haben wird

$$x = x' + \frac{p}{4} + \frac{p}{2t^2}.$$

Die Formel (A) wird also durch die Substitution dieses Werths werden

$$y^2 = t^2\left[x'^2 - \frac{p^2}{4t^4}(t^2 + 1)\right] \ (B).$$

Um die erste Halbaxe zu finden, setze man in diesem Resultate $y = 0$, und man wird erhalten

$$x' = a = \pm \frac{p}{2t^2}\sqrt{(t^2 + 1)},$$

und um die zweyte Halbaxe zu finden, setze man $x' = 0$, welches geben wird

$$y = b = \frac{p}{2t} \sqrt{(t^2 + 1)}.$$

Erinnert man sich nun, daß man nach den Rechnungen der Kreisfunctionen Fig. 31. hat

$$\sin a = \frac{\tan a}{\sqrt{(1 + \tan a^2)}},$$

so kann man den Ausdruck der Axen folgendermaßen vereinfachen. Bezeichnet man z. B. den Sinus des Winkels MmM' durch f, wenn es seine Tangente durch t ist, so kann man daraus vermittelst der vorhergehenden Formel herleiten, daß

$$\frac{1}{f} = \frac{\sqrt{(1 + t^2)}}{t},$$

und folglich

$$a = \frac{p}{2tf}, \quad b = \frac{p}{2f};$$

die Gleichung (B) wird also

$$y^2 = t^2 \left(x'^2 - \frac{p^2}{4t^2f^2}\right) \text{(B')}.$$

Hieraus folgt, daß wenn man die x um die Größe $\frac{1}{4}p + \frac{p}{2t^2}$ vermindert, und eine Hyperbel beschreibt, deren Axen 2a und 2b sind, diese Curve der Lauf der Gleichung (A) seyn wird.

In der vorhergehenden Auflösung hat man angenommen, daß der gegebene Winkel MmM' spitz sey, und es ist offenbar, daß wenn er stumpf wäre, seine negative Tangente, wenn in den Gliedern der Gleichung (A)

nur immer in der zweyten Potenz vorkommt, darin keine Veränderungen hervorbringen würde. Hieraus schließen wir, daß der eine der hyperbolischen Aeste QR dem Fall ein Genüge leistet, wo der vorgelegte Winkel ein spitzer, und der andre Q'R dem Fall, wo dieser Winkel stumpf ist.

Wenn es sich endlich zutragen sollte, daß der gegebene Winkel MmM' ein rechter wären, so würde die gesuchte Linie die Leitlinie der Parabel selbst seyn, weil alsdann die Gleichung (B'), was auch y' seyn mag, geben würde $y = 0$; und weil $x = x' + \frac{1}{4}p + \frac{1}{2}\frac{p}{t^2}$, so würde man unter eben diesen Umstande haben $x = \frac{1}{4}p$; welches den Abstand des Scheitels der Curve von der Leitlinie ausdrückt.

Aufgabe.

§. 55.

Einen Punct M' von der Beschaffenheit zu finden, daß, wenn man von demselben auf die Schenkel eines gegebenen Winkels MAB senkrechte Linien fällt, das hieraus erfolgende Viereck einem gegebenen Quadrat q^2 gleich sey.

Es seyen Fig. 31. a die Tangente des gegebenen Winkels MAB, und x', y' die Coordinaten des gesuchten Punctes.

Auflösung.

Die Gleichung der durch den Anfangspunct A gehenden Geraden AM ist

$$y = ax,$$

und die der darauf senkrechten MM′ ist

$$y - y' = -\frac{1}{a}(x - x').$$

Die Coordinaten des Durchschnittspunctes M dieser Geraden werden also seyn

$$x = \frac{x' + ay'}{1 + a^2}, \quad y = \frac{a^2y' + ax'}{1 + a^2}.$$

Der Flächeninhalt des Dreyecks AMM′ in einer Function der Coordinaten seiner Winkel ausgedrückt ist (§. 81. L. C.)

$$\frac{x'(a^2y' + ax') - y'(x' + ay')}{2(1 + a^2)},$$

und der Flächeninnhalt des Dreyecks AP′M′ $= \frac{x'y'}{2}$. Da nun das Viereck AMM′P′ = AMM′ + AM′P′ $= q^2$, so folgt, daß

$$a^2x'y' + ax'^2 - x'y' - ay'^2 + x'y' + a^2y'x' = 2q^2(1+a^2),$$

oder, wenn man die Zeichen ändert, reducirt, und alles durch a dividirt,

$$y'^2 - 2ax'y' - x'^2 = -2q^2\left(\frac{1 + a^2}{a}\right) \text{ (A).}$$

Dieses ist die Gleichung, welche man construiren müßte, um den Lauf aller Puncte M′ zu erhalten, welche der Bedingung der vorgelegten Aufgabe ein Genüge thun. Löst man diese Gleichung nach y′ auf, so wird man haben

$$y' = ax' \pm \sqrt{\left[(1 + a^2)\left(x'^2 - \frac{2q^2}{a}\right)\right]},$$

woraus man sieht, daß die Curve, auf welche sie führt,

eine Hyperbel ist, welche ihren Mittelpunct im Puncte A hat; und daß wegen der rationalen Größe ax, die Gerade AM für einen ihrer Durchmesser genommen werden muß. Man trage daher der Axe AY parallel, sowohl oberhalb als unterhalb der AM und der Am Theile, welche der Größe

$$\sqrt{\left[(1 + a^2)\left(x'^2 - \frac{2q^2}{a}\right)\right]}$$

gleich; alle auf diese Art erhaltene Puncte zusammen genommen werden die Aeste der zu beschreibenden Curve bestimmen. Wir wollen uns nicht mehr über das Detail dieser Construction auslassen, weil es keine Schwierigkeit darbiethet; wir bemerken bloß, daß, wenn man in der Gleichung (A) das durch $x'y'$ multiplicirte Glied hinwegschaffen wollte, man dann die Richtung der Coordinaten verändern müßte, indem man darin setzt (§. 114. L. C.)

$$x' = mu - nt, \qquad y' = nu + mt;$$

und in diesem Falle würde die erfolgende Gleichung die der auf ihre Axen zurückgeführten Hyperbel seyn.

Wenn a unendlich ist, oder, welches dasselbe ist, wenn der gegebene Winkel ein rechter ist, so reducirt sich die Gleichung (A) auf $x'y' = q^2$, weil alle Glieder ohne a gegen die mit a behafteten als Null anzusehen sind. Wollte man aber die Betrachtung des unendlichen vermeiden, so müßte man $a = \frac{\sin A}{\cos A}$ setzen, und die Gleichung (A) wird durch die Substitution dieses Werths, und nachdem man den Nenner cos A hinweg geschaft hat,

$$\cos A y'^2 - 2\sin A x'y' - \cos A x'^2.$$
$$= -2q^2\left(\frac{\cos A^2}{\sin A} + \sin A\right).$$

Da der Winkel MAB ein rechter ist, so hat man $\cos A = 0$, und $\sin A = 1$; die vorhergehende Gleichung reducirt sich also auf

$$x'y' = q^2.$$

Dieses ist die der gleichseitigen Hyperbel zwischen ihren Asymptoten AX, AY Fig. 41.

Wenn endlich der Winkel größer als ein Quadrant ist, so wird seine Tangente a negativ, und die Gleichung (A), welche noch zur Hyperdel gehört, verwandelt sich in

$$y'^2 + 2ax'y' - x'^2 = 2q^2\left(\frac{1+a^2}{a}\right).$$

Aufgabe.

§. 56.

Zwey Kreise AB, A'B' Fig. 42 sind der Größe und Lage nach in einer Ebne gegeben; durch irgend einen Punct C' des Kreises A'B' habe man eine unbegränzte Tangente geführt, welche den andern Kreis in zweyen Puncten m, m' schneidet, aus welchen jenem die Tangenten mM, m'M geführt sind; man verlangt nun die Natur der Linie, auf welcher alle Durchschnittspuncte M liegen.

Es seyen α und β die Coordinaten des gesuchten Punctes M,

der Halbmesser AB $= r$ x, Y } die Coordinaten } m
der Halbmesser A'B' $= r'$ X, y } der Puncte } m',

und

und den Abstand AA′ beyder Mittelpuncte wollen wir durch a bezeichnen.

Auflösung.

Da die Tangente Mm durch einen Punct gehen muß, dessen veränderliche Ordinaten α, β sind, so wird ihre Gleichung seyn (§. 21.)

$$\beta y + \alpha x = r^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1),$$

und da die Gleichung des Kreises AB ist

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2),$$

so wird die Combination dieser Gleichungen geben

$$x = \frac{\alpha r^2 \pm \beta r \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 - r^2)}}{\alpha^2 + \beta^2}$$

$$y = \frac{\beta r^2 \mp \alpha r \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 - r^2)}}{\alpha^2 + \beta^2} \; {}^{*)}.$$

Es ist zu merken, daß die Werthe von x und von y, nach den obern Zeichen genommen, respectiv die Größen von X und von Y bezeichnen; und daß dieselben Werthe, nach den untern Zeichen genommen, mit den Größen von x und von y übereinstimmen; setzt man nun zur Abkürzung $\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 - r^2)} = M$, und $\alpha^2 + \beta^2 = N$, so hat man bloß

$$X = \frac{\alpha r^2 + \beta r M}{N}, \qquad x = \frac{\alpha r^2 - \beta r M}{N},$$

$$Y = \frac{\beta r^2 + \alpha r M}{N}, \qquad y = \frac{\beta r^2 - \alpha r M}{N};$$

---

*) Da die Größen x, y in den Gleichungen (1) und (2) auf einerley Axe vorkommen, so folgt, daß man zum Beyspiel den Werth von y erhält, wenn man in dem von x, α in β verwandelt, und umgekehrt.

Da die Coordinaten der Puncte m, m′ bekannt sind, so suche man die Abcisse AT des Punctes, in welchem die Gerade m m′ die Axe AX trift, und es ist offenbar, daß man, wenn der Abstand p′T durch z bezeichnet wird, diese Gleichheit hat,

$$\frac{Y - y}{X - x} = \frac{y}{z},$$

woraus man zieht, nachdem man die vorhergehenden analytischen Werthe angewendet und reducirt hat

$$z = \frac{\beta y}{\alpha},$$

folglich $AT = X + z = X + \frac{\beta y}{\alpha}$.

Substituirt man nun in der Formel des §. 32. statt a dessen gegenwärtigen Werth $\frac{y}{z} = \frac{\alpha}{\beta}$, und statt α die Größe $a + X + z$, so erhält man, wenn man den Buchstaben r accentuirt

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{r'}{\sqrt{[(a + X + z)^2 - r'^2]}}.$$

Wenn nun dieser Ausdruck, welcher der der trigonometrischen Tangente des von der Axe AX und der Tangente CT′ des Kreises A′B′ gebildeten Winkels ist, von seinem Wurzelzeichen befreyet wird, so kann er, wenn man statt X und z die dafür oben gefundenen Werthe setzt, folgendermaaßen geschrieben werden

$$\left[a + \frac{\alpha r^2 + \beta r M}{N} + \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{\beta r^2 - \alpha r M}{N}\right)\right]^2 - r'^2 = \frac{r'^2 \beta^2}{\alpha^2},$$

oder

$$\left(a + \frac{(\alpha^2 + \beta^2)r^2}{\alpha N}\right)^2 - r'^2 = \frac{r'^2\beta^2}{\alpha^2},$$

oder, weil $\alpha^2 + \beta^2 = N$

$$\left(a + \frac{r^2}{\alpha}\right)^2 - r'^2 = \frac{r'^2\beta^2}{\alpha^2}.$$

Entwickelt man den ersten Theil dieser Gleichung und schafft die Nenner hinweg, so kommt,

$$a^2\alpha^2 + 2ar^2\alpha - r'^2\alpha^2 + r^4 = r'^2\beta^2,$$

oder endlich

$$\beta^2 + \left(\frac{r'^2 - a^2}{r'^2}\right)\alpha^2 - \frac{2ar^2}{r'^2}\alpha - \frac{r^4}{r'^2} = 0.$$

Dieses ist die Gleichung der Curve des Durchschnitts der Tangenten mM, m'M, deren Lauf eine Parabel, eine Ellipse oder eine Hyperbel ist, je nachdem r' gleich, oder größer oder kleiner als a ist.

Aufgabe.

§. 57.

In ein Dreyeck Fig. 43. eine Ellipse dergestalt einzuschreiben, daß ein Durchmesser durch die vom Scheitel nach der Mitte der Basis gezogene Linie gehe.

Da der große Durchmesser AB auf der Linie AT genommen ist, welche durch die Mitte der Basis und durch den Punct T geht, so wird der kleinere Durchmesser CD nothwendigerweise der Tangente GH parallel seyn; und die Berührungspuncte M, M' werden auf den äußersten Puncten der doppelten Ordinate MM' liegen, weil zu einer und derselben Abcisse zwey gleiche

Ordinaten gehören, und weil die ihnen zugehörigen Tangenten, sich in einem und demselben Puncte schneiden.

Dieses vorausgesetzt, wollen wir setzen GH = 2m, AG = m, AT = n, den Durchmesser AB = a′, seinen zugeordneten CD = b′, und durch α, β wollen wir die Coordinaten des Punctes M bezeichnen.

Auflösung.

Die Gleichung der Ellipse in Beziehung auf ihre Durchmesser, ist

$$a'^2t^2 + b'^2u^2 = a'^2b'^2,$$

wo u als die auf AB genommene Abcisse, und t als die correspondirende Ordinate betrachtet wird. Diese Gleichung wird für den Punct M

$$a'^2\beta^2 + b'^2\alpha^2 = a'^2b'^2 \;.\;.\;.\;.\;.\; (1).$$

Da ferner die Puncte T, M, H auf einer und derselben Geraden liegen, so müssen die Verhältnisse $\frac{PM}{PT}$ und $\frac{AH}{AT}$ nothwendigerweise gleich seyn; wendet man also die algebraische Bezeichnung an, so hat man

$$\frac{m}{n} = \frac{\beta}{n - a' - \alpha},$$

woraus man zieht

$$\beta = \frac{(n - a' - \alpha)\, m}{n} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (2).$$

Um endlich auszudrücken, daß die Linien GT, TH mit der Ellipse in Berührung sind, wird man haben

Subtangente $PT = \frac{a'^2 - \alpha^2}{\alpha} = n - a' - \alpha \ldots\ldots (3).$

Da diese drey Gleichungen eine unbekannte Größe mehr enthalten, so bleibt die Aufgabe unbestimmt, das heißt, es existirt eine unendliche Anzahl Ellipsen, welche mit der vorgetragenen Eigenschaft behaftet sind. Allein diese Aufgabe würde auf eine einzige eingeschränkt werden, wenn man die Bedingung hinzu fügte, daß die zu beschreibende Ellipse die Mitte der Seite HT berühren muß; denn alsdann hat man

$$\alpha = \frac{n}{2} - a',$$

und da die Gleichung (2) vermittelst dieses Werths $\beta = \frac{m}{2}$ wird; so folgt, daß sich die Gleichungen (1) und (3) respectiv in diese verwandeln

$$\frac{a'^2 m^2}{4} + b'^2 \left(\frac{n}{2} - a'\right)^2 = a'^2 b'^2$$

und

$$\frac{n}{2} = \frac{a'^2 - \left(\frac{n}{2} - a'\right)^2}{\frac{n}{2} - a'},$$

oder um zu vereinfachen in

$$a'^2 m^2 + b'^2 (n - 2a')^2 = 4a'^2 b'^2 \ldots\ldots (1')$$

und

$$n = 3a' \ldots\ldots (3').$$

Da diese letztere $a' = \frac{n}{3}$ giebt, so wird der vorhergehende geben $m^2 + b'^2 = 4b'^2$, und folglich

$$b' = \sqrt{\frac{m^2}{3}} = OD.$$

Der zweyte halbe Durchmesser ist also die mittlere Proportionale zwischen $\frac{m}{3}$ und m, oder weil OK $= \frac{2m}{3}$ und PM $= \frac{m}{2}$, so ist eben dieser halbe Durchmesser die mittlere Proportionale zwischen OK und PM.

Andrerseits wird, weil $a' = \frac{n}{3}$, der Mittelpunct O der Ellipse nothwendigerweise auf der Linie HM liegen, welche sich auf der Mitte von GT endigt; dieses ist eine unmittelbare Folgerung aus dem Lehrsatze (§. 27.).

Es ist klar, daß wenn das gegebene Dreyeck GTH gleichschenklicht wäre, die Linien AB, CD für die Axen der Ellipse genommen werden müßten. Man sieht überdieß, daß wenn dieses Dreyeck gleichseitig ist, man haben würde $n = \sqrt{3m^2}$, und AO $= \frac{n}{3} = \sqrt{\frac{m^2}{3}}$, so wie man dann hat OD $= \sqrt{\frac{m^2}{3}}$. In diesem Falle wird also die Ellipse in einen Kreis übergehen, wie man leicht erwarten konnte.

Wir wollen im Vorbeygehen anmerken, daß die nach den eben vorgetragenen Bedingungen beschriebene Ellipse die möglichst größte von allen denen ist, welche im Dreyecke GHT eingeschrieben werden können.

Aufgabe.

§. 58.

Eine Curve der zweyten Ordnung zu beschreiben, welche durch einen gegebenen Punct M′ geht, und welche die Schenkel des Winkels MTm Fig. 44. in den beyden gegebenen Puncten M, m berühre.

Wir wollen annehmen, daß die Curve eine Ellipse sey. Man verbinde mM, und aus der Mitte P dieser Linie ziehe man PT, welche die Subtangente in Rücksicht der halben conjugirten Durchmesser AB′, AC′ seyn wird, welche mit einander den durch TPM dargestellten Winkel bilden; man bezeichne durch

$\left.\begin{matrix}\alpha, \beta \\ \alpha', \beta'\end{matrix}\right\}$ die Coordinaten der Puncte $\left\{\begin{matrix}M \\ M'\end{matrix}\right.$,

welche, als vom Mittelpuncte A ausgenommen, gerechnet werden.

Es seyen ferner

$A'B' = a'$, $AC' = b'$, $PT = m$, $PP' = n$,

Auflösung.

Die Gleichung der Ellipse in Rücksicht auf ihre Durchmesser ist

$$a'^2 t^2 + b'^2 u^2 = a'^2 b'^2.$$

Für die gegebenen Puncte M, M′ nimmt sie diese Form

$$a'^2 \beta^2 + b'^2 (\alpha' + n)^2 = a'^2 b'^2 \;.\;.\;.\;.\;.\; (1)$$

und

$$a' \beta'^2 + b'^2 \alpha'^2 = a'^2 b'^2 \;.\;.\;.\;.\;.\; (2)$$

Der Ausdruck der Subtangente PT oder m ist für die Abcisse $\alpha' + n$ oder AP

$$m = \frac{a'^2 - (\alpha' + n)^2}{(\alpha' + n)} \;.\;.\;.\;.\;.\; (3)$$

und aus den Gleichungen (1) und (2) erhält man

$$b'^2 = \frac{a'^2\beta^2}{a'^2 - (\alpha' + n)^2}, \quad b'^2 = \frac{a'^2\beta'^2}{a'^2 - \alpha'^2};$$

setzt man diese beyden Werthe einander gleich, so erhält man nach der nöthigen Vereinfachung

$$\beta^2 (a'^2 - \alpha'^2) = \beta'^2 [a'^2 - (\alpha' + n)^2];$$

und da die Gleichung (3) giebt

$$a'^2 = m(\alpha' + n) + (\alpha' + n)^2,$$

so erhält man, wenn dieser Werth in die vorhergehende Gleichung gesetzt wird,

$$\beta^2 m\alpha' + \beta^2 mn + 2\beta^2\alpha' n + \beta^2 n^2 = \beta'^2 m\alpha' + \beta'^2 mn,$$

woraus man zieht

$$\alpha' = \frac{(\beta'^2 - \beta^2)\, mn - \beta^2 n^2}{2\beta^2 n - (\beta'^2 - \beta^2)\, m},$$

und folglich AP oder

$$\alpha' + n = \frac{\beta^2 n^2}{2n\beta^2 - (\beta'^2 - \beta^2)\, m} \; (A).$$

Da nun der Werth von $\alpha' + n$ bekannt ist, so wird der aus der Gleichung (3) hergeleitete Werth von a' durch

$$\sqrt{[m(\alpha' + n) + (\alpha' + n)^2]}$$

ausgedrückt seyn, und die Gleichung (1) wird für den Ausdruck des zweyten halben Durchmessers b' geben

$$\frac{a'\beta}{\sqrt{[a'^2 - (\alpha' + n)^2]}}.$$

Da die beyden halben conjugirten Durchmesser bekannt sind, so kann man die Größe der Halbaxen der Ellipse, und ihre Lage gegen die Durchmesser bestimmen. Ungeachtet die Rechnungen, welche diese Bestimmung erfordert, nichts weniger als schwer sind, so wollen wir sie doch zum Nutzen einiger Leser ausführen; aber vorher wollen wir aus den eben erhaltenen Resultaten einige Folgerungen ziehen.

Es könnte sich zuvörderst zutragen, daß die Puncte m, M von T gleiche Entfernung haben und daß zu gleicher Zeit $a' = b'$; wenn nun diese beyden Umstände zugleich eintreten, so wird der Winkel TPM ein rechter seyn, und die elliptische Curve verwandelt sich in den Umkreis eines Zirkels. Hieraus folgt, daß

$$a'^2 = b'^2 = \frac{a'^2 \beta^2}{a'^2 - (\alpha' + n)^2},$$

das heißt

$$a'^2 = (\alpha' + n)^2 + \beta^2.$$

Ueberdieß ist $a'^2 = [m(\alpha' + n) + (\alpha' + n)^2]$; aus diesen beyden Werthen schließt man also

$$\alpha' + n = \frac{\beta^2}{m}.$$

Vergleicht man überdieß diesen Werth mit den oben erhaltenen (A), so erfolgt daraus PT oder

$$m = \frac{2\beta^2 n}{n^2 + \beta'^2 - \beta^2}.$$

Dieses ist die Höhe, die das gleichschenklichte Dreyeck haben muß, damit die darin einzuschreibende Curve ein Kreis werde.

Wenn man in dem durch die Gleichung (A) gegebenen allgemeinen Ausdruck von $\alpha' + n = AP$, $2n\beta^2 = (\beta'^2 - \beta^2)\,m$, oder $m = \frac{2n\beta^2}{\beta'^2 - \beta^2}$ hätte, so würde dieser Ausdruck so wie die Werthe von a′ und b′ unendlich werden; die Ellipse würde dann in eine Parabel übergehen. Was den Scheitelpunct B′ dieser letztern betrift, so kann man ihn bestimmen, wenn man $TB' = \frac{m}{2}$ nimmt, weil in der Parabel die Subtangente PT der doppelten Abcisse PB′ gleich ist, wenn der Anfangspunct der Coordinaten in den Punct B′ getragen wird. Ferner ist die Gleichung dieser Curve für den Punct M, und in Rücksicht auf den Durchmesser AB′, $\beta^2 = \frac{p'm}{2}$, wo p′ der Parameter ist. Für irgend einen Punct hat man also

$$y'^2 = \frac{2\beta^2}{m}\,x'.$$

Wenn endlich in der Gleichung (A)

$$2n\beta^2 < (\beta'^2 - \beta^2)\,m,$$

oder

$$m > \frac{2n\beta^2}{\beta'^2 - \beta^2},$$

so wird der Mittelpunct der gesuchten Curve auf der entgegengesetzten Seite von AP, das heißt im Puncte A′ liegen, und alsdann wird diese Curve eine Hyperbel seyn, deren Halbaxen man vermittelst der halben zugeordneten Durchmesser bestimmen kann. Hier ist nun über diesen Gegenstand die Ausführung der Rechnungen, auf welche die Ellipse führt.

§. 59.

Wenn Fig. 45. die beyden zugeordneten Durchmesser einer Ellipse nebst dem von ihnen eingeschlossenen Winkel gegeben sind, die beyden Halbaxen zu finden.

Es ist (§. 136 und 137 L. C.) bewiesen worden, daß zwischen den beyden Halbaxen a, b und den beyden halben zugeordneten Durchmessern a′, b′ diese beyden Beziehungen anzutreffen sind:

$$a^2 + b^2 = a'^2 + b'^2$$
$$ab = a'b'f,$$

wenn f den Sinus des von den beyden zugeordneten Durchmessern gebildeten Winkels ausdrückt.

Wenn man das doppelte der zweyten zur ersten hinzusetzt, und dann von derselben abzieht, so wird man haben

$$a^2 + b^2 + 2ab = a'^2 + b'^2 + 2a'b'f$$
$$a^2 + b^2 - 2ab = a'^2 + b'^2 - 2a'b'f;$$

zieht man die Quadratwurzel, so kommt

$$a + b = \sqrt{(a'^2 + b'^2 + 2a'b'f)}$$
$$a - b = \sqrt{(a'^2 + b'^2 - 2a'b'f)};$$

woraus man zieht

$$2a = \sqrt{(a'^2 + b'^2 + 2a'b'f)} + \sqrt{(a'^2 + b'^2 - 2a'b'f)}$$
$$2b = \sqrt{(a'^2 + b'^2 + 2a'b'f)} - \sqrt{(a'^2 + b'^2 - 2a'b'f)}.$$

Diese Wurzelgrößen lassen sich bequem vermittelst des schiefwinklichten Dreyecks construiren; denn die erste Wurzelgröße bezieht sich auf ein Dreyeck, dessen senk-

rechte außerhalb fällt, und die zweyte Wurzelgröße auf ein Dreyeck, dessen senkrechte innerhalb fällt.

Es sey daher vom äußersten Punct C′ des Durchmessers auf seinen zugeordneten die senkrechte C′P gefällt, und diese C′P um die Größe C′D = AB verlängert; so wird man für den Ausdruck der ersten Wurzelgröße haben

$$AD = \sqrt{(AC'^2 + C'D^2 + 2C'D \times PC')}$$
$$= \sqrt{(b'^2 + a'^2 + 2a'b'f)}.$$

Es sey ferner C′PD′ = AB′; so wird man für den Ausdruck der zweyten Wurzelgröße haben

$$AD' = \sqrt{(AC'^2 + C'D'^2 - 2C'D' \times PC')}$$
$$= \sqrt{(b'^2 + a'^2 - 2a'b'f)}.$$

Der Rest der Operation hat nun keine Schwierigkeit mehr.

§. 60.

Was den Winkel C′AB betrifft, so kann man ihn folgendermaaßen bestimmen; man ziehe aus den im (§. 136. L. C.) erhaltenen Gleichungen

$$a'^2 = \frac{a^2b^2}{a^2n^2 + b^2m^2}, \quad m^2 + n^2 = 1,$$

den Werth von n, indem man in der ersten Gleichung für m^2, dessen Werth $1 - n^2$ setzt, man wird also haben

$$\sin C'AB = n = \frac{b}{a'} \sqrt{\left(\frac{a^2 - a'^2}{a^2 - b^2}\right)}.$$

Eben so würde daraus für den Winkel BAB′ erfolgen

$$\sin BAB' = q = \frac{b}{b'} \sqrt{\left(\frac{a^2 - b'^2}{a^2 - b^2}\right)}.$$

Man würde auf eine analoge Art, bey der Hyperbel verfahren; allein in diesem Falle sind die Werthe von a und b viel verwickelter als die, welche der Ellipse zukommen, und sie sind auch nicht einer so einfachen Construction fähig.

Aufgabe.

§. 61.

Die Gleichung der Curve DM′Q Fig. 46. zu finden, deren Eigenschaft diese ist, daß wenn man von einem der Lage nach gegen eine Linie CB gegebenen festen Punct A nach allen ihren Puncten gerade Linien AD, A′M zieht, jeder der Theile CD, MM′ dieser Linien von einer gegebenen Größe d sey.

Man nehme zu den Coordinaten des Systems die Geraden AX, AY, von denen die erste der gegebenen CB parallel, und die andre darauf senkrecht ist; und es seyen

$$AC = b, \qquad CD = d$$
$$AP' = x', \qquad P'M' = y'.$$

Auflösung.

Die Gleichung der Geraden AM ist $y = Ax$, oder $y = \frac{y'}{x'} x$. Die der Geraden CB, welche beständig der AX parallel läuft, ist $y = b$.

Diese beyden Gleichungen gegen einander gehalten, geben für die Abcisse des Punctes M

$$x = \frac{bx'}{y'}.$$

Andrerseits ist der Abstand $AM' = \sqrt{(x'^2 + y'^2)}$, und der Abstand

$$AM = \frac{b}{y'} \sqrt{(x'^2 + y'^2)}.$$

Da nun $AM = AM' - MM'$, so wird man haben

$$AM = \sqrt{(x'^2 + y'^2)} - d;$$

setzt man diesen Werth von AM dem vorhergehenden gleich, so wird daraus erfolgen

$$\frac{b}{y'} \sqrt{(x'^2 + y'^2)} = \sqrt{(x'^2 + y'^2)} - d,$$

und schaft man das Wurzelzeichen hinweg, so erhält man zur verlangten Gleichung

$$y'^4 - 2by'^3 + b^2y'^2 - d^2y'^2 + x'^2y'^2 - 2by'x'^2 + b^2x'^2 = 0.$$

Die Curve, auf welche diese Gleichung führt, wird die Conchoide, Muschellinie, genannt. Nicomedes, der der Erfinder derselben ist, hat sich ihrer zur Auflösung der Aufgabe von zweyen mittleren Proportionallinien bedient. Die Gerade CB ist offenbar die Asymptote dieser Curve.

Aufgabe.

§. 62.

Die Gleichung der Curve AMC Fig. 47. zu finden, die so beschaffen ist, daß wenn man, nachdem auf einer gegebenen Geraden AB als Durchmesser ein Halbkreis AM'B beschrieben, und durch den Punct

B die senkrechte BN errichtet worden, durch den Punct A und durch irgend einen Punct dieser Curve, die Gerade AMN zieht, welche den Halbkreis in M′, und die Gerade BN in N trifft, immer AM = M′N sey.

Es sey die gegebene Linie AB = 2r, und x′, y′ die Coordinaten des Punctes M der vorgelegten Curve.

Auflösung.

Da AM der M′N gleich seyn muß, wie auch übrigens der Winkel NAB beschaffen seyn mag, so wird man unter demselben Umstande haben AP = P′B; also

$$AP' = 2r - x.$$

Da die Gleichung des Kreises, wenn der Anfangspunct im Puncte A des Umkreises liegt, $y^2 = 2rx - x^2$ ist, so wird man für den Punct M′ haben

$$y^2 = 2r(2r - x') - (2r - x')^2,$$

und die Gleichung der Geraden AN wird für denselben Punct werden

$$y = \frac{y'}{x'}(2r - x').$$

Quadrirt man diese, und setzt man ihren zweyten Theil dem der vorhergehenden Gleichung gleich, so erhält man nach gemachter Reduction

$$y'^2(2r - x') - x'^3 = 0.$$

Dieses ist die Cissoide des Diocles. Die Alten mach-

ten von dieser Curve Gebrauch, um die Aufgabe von der Verdopplung des Cubus aufzulösen.

Wir wollen uns nicht weiter mit den Curven höherer Ordnungen beschäftigen, weil unser Zweck bloß der ist, zu zeigen, daß die analytische Methode, welche den Gegenstand unsrer Betrachtungen ausmacht, sich bey allen Aufgaben der Geometrie anbringen läßt, wie sie auch immer beschaffen seyn mögen.

Aufgabe.

§. 63.

Vier Liniale AM', Am', M'M'', m'M'' Fig. 48. sind in der Form eines Parallelogramms dergestallt mit einander verbunden, daß sie sich um ihre Winkel, wie um Gewinde bewegen können; die Liniale m'M'', M'M'' seyen um die Theile mm', MM' verlängert, welche respectiv den Linialen Am', AM' gleich sind; man verlangt die Natur der Curven, welche beschrieben werden, wenn, indem sich das ganze System um den Punct A als einen Zapfen bewegt, der Punct M eine bekannte Curve durchläuft.

Es sey der feste Punct A für den Anfangspunct der rechtwinklichten Coordinaten AX, AY genommen, und wir wollen durch

X, Y	die Coordi-	M	x, y	die der	m
X', Y'	naten der	M'	x', y'	Puncte	m'
X'', Y''	Puncte	M''			

bezeichnen. Wir wollen ferner AM' = a, Am' = a' setzen.

Auflö-

Auflösung.

Aus der Construction folgt zuvörderst, daß die drey Puncte m, A, M in gerader Linie sind; denn wegen der Parallelen mM″, AM′ und Am′, MM′ sind die Winkel mm′A, m′AM′, AM′M einander gleich, woraus man schließen kann, daß die gleichschenklichten Dreyecke mm′A, AM′M nothwendigerweise gleichwinklicht sind. Wie also auch das Instrument liegen mag, so hat man immer zwischen den drey Winkeln um den Punct A die Beziehung

$$mAm' + m'AM' + M'AM = 2q,$$

wo q den Quadranten oder den vierten Theil des Umkreises bezeichnet.

Wenn man nun A′M der AP parallel führt, und die Ordinaten P′M′, P″M″ bis in N′, N″ verlängert, so wird (§. 2.) der Sinus des Winkels M′MN′ durch das Verhältniß $\frac{M'N'}{M'M} = \frac{P''M'' - P'M'}{M''M'}$ ausgedrückt seyn; woraus man zieht, wenn man die algebraischen Werthe anbringt

$$a(Y'' - Y') = a'(Y' + Y) \ldots\ldots (1)$$

desgleichen wird der Cosinus des Winkels M′MN′ zum Ausdruck haben

$$\frac{MN'}{M'M} = \frac{A'N' - A'N''}{M'M''};\ \text{also}$$

$$a(X' - X'') = a'(X - X') \ldots\ldots (2).$$

Andrerseits giebt das rechtwinklichte Dreyeck M′N′M diese Gleichung

$$(Y' + Y)^2 + (X - X')^2 = a^2,$$

welche, nachdem sie entwickelt und vermittelst der im Dreyecke AP'M' anzutreffenden Beziehung $X'^2 + Y'^2 = a^2$ vereinfacht werden, sich auf

$$X^2 + Y^2 - 2XX' + 2YY' = 0 \;.\;.\;.\;.\;.\; (3)$$

reducirt.

Dieses vorausgesetzt, erhält man, wenn die Gleichungen (1) und (2) nach X' und Y' aufgelöst werden,

$$Y' = \frac{aY'' - a'Y}{a + a'}, \quad X' = \frac{aX'' + a'X}{a + a'}.$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichung (3), so wird sie

$$(a - a')(X^2 + Y^2) = 2a(X''X - Y''Y) \quad (A).$$

Da der Cosinus des Winkels M'MN' auch noch durch

$$\frac{MN''}{M''M} = \frac{MN'}{M'M}$$

ausgedrückt werden kann, so folgt, daß

$$(a + a')(X - X') = a(X - X'');$$

da ferner die Tangente dieses Winkels durch das Verhältniß $\frac{M'N''}{N''M} = \frac{M'N'}{N'M}$ ausgedrückt ist, so hat man

$$(Y + Y'')(X - X') = (Y + Y')(X - X'');$$

diese Gleichung mit der vorhergehenden verbunden, führt auf

$$X' = \frac{a'X + aX''}{a + a'}, \quad Y' = \frac{aY'' - a'Y}{a + a'};$$

woraus folgt, wegen $X'^2 + Y'^2 = a^2$,

$$(a'X + aX'')^2 + (aY'' - a'Y)^2 = a^2(a + a')^2 \quad (B).$$

Man erhält in Rücksicht der Puncte m, m′, M″ den Gleichungen (A), (B), welche in Beziehung auf die Puncte M, M′, M″ sind, völlig ähnliche; und man darf in jenen nur X in — x; Y in — y; a in a′, und umgekehrt verwandeln, welches giebt

$$(a'-a)(x^2+y^2) = -2a'(X''x - Y''y) \quad (A')$$

$$(a'X''-ax)^2+(a'Y''+ay)^2 = a'^2(a+a')^2 \quad (B'),$$

diese Veränderung rührt daher, weil die Coordinaten x, y respectiv gegen die Coordinaten X, Y eine entgegengesetzte Lage haben, und daß sie aus dieser Ursache mit verschiedenen Zeichen behaftet seyn müssen. Uebrigens kann man zu diesen letzteren Resultaten direkt auf einem ähnlichen Wege gelangen als wir eben genommen haben.

Da das System der Gleichungen (A′), (B′) bis auf die Verschiedenheit der Zeichen mit dem durch (A) und (B) bezeichneten völlig einerley ist, so ist man berechtigt zu schließen, daß wenn der Punct M eine Curve durchläuft, der Punct m eine ähnliche beschreibt, deren Verhältniß zur ersten wie a′ : a ist. Es ist überdieß offenbar, daß diese Gleichungen verbunden mit der Gleichung der von einem der Puncte m, M″, M durchlaufenen Curve, zur Bestimmung der Natur der von den beyden andern Puncten beschriebenen Curven hinreichen werden; denn wegen der sechs unbekannten X, Y, x, y, X″, Y″ und der Existenz von fünf Gleichungen, gelangt man immer durch die Elimination zu einer Gleichung zwischen zweyen der unbekannten, welche man betrachtet.

Wir wollen zum Beyspiel annehmen, der Punct M durchlaufe eine durch die Gleichung $Y = 0$ gegebene Gerade (diese ist bekanntlich die Axe der Abcissen selbst); man soll die Curve bestimmen, welche der Punct M″ in eben der Zeit beschreibt.

Die Gleichungen (A), (B), welche sich auf die Bewegung des Punctes M beziehen, werden, wenn man darin $Y = 0$ setzt

$$(a - a')\,X = 2aX''$$
$$(a'X + aX'')^2 + a^2Y''^2 = a^2\,(a + a')^2;$$

und eliminirt man X aus der zweyten, indem man darin ihren aus der ersten genommenen Werth setzt, so wird man haben

$$a^2Y''^2 + \left(aX'' + \frac{2aa'X''}{a - a'}\right)^2 = a^2\,(a + a')^2,$$

woraus man für die Gleichung der durch den Punct M″ beschriebenen Ellipse zieht,

$$Y''^2 + \left(\frac{a + a'}{a - a'}\right)^2 X''^2 = (a + a')^2.$$

Setzt man in dieser Gleichung $Y'' = 0$, so erhält man den Ausdruck für die auf AX genommene kleine Halbaxe der Ellipse; setzt man im Gegentheile $x = 0$, so erhält man den Ausdruck der auf AY genommenen großen Halbaxe. Im ersten Falle hat man

$$X = a - a'$$

und im zweyten

$$Y = a + a'.$$

Hieraus folgt, daß man, wenn zwey Axen m, n

einer Ellipse gegeben sind, die Länge zweyer Liniale von der Art finden kann, daß, indem der Punct M eine Gerade durchläuft, der Punct M″ zugleich die verlangte Ellipse beschreibt. In der That würde man haben

$$m = 2(a + a'), \quad n = 2(a - a'),$$

und folglich

$$a = \frac{m + n}{2}, \quad a' = \frac{m - n}{2}.$$

Dieses sehr einfache Mittel, eine Ellipse durch eine stetige Bewegung zu beschreiben, ist weit bequemer als das, welches darin besteht, diese Curve durch einen der Puncte eines Lineals zu ziehen, dessen äußersten Puncte unterworfen sind, sich längs zweyer andern Liniale zu bewegen, welche mit einander irgend einen Winkel bilden.

§. 64.

Man könnte noch durch besondre Betrachtungen die Gleichung der vom Puncte M″ beschriebenen Curve erhalten, wenn der Punct M eine Gerade durchläuft, und hierzu führt uns folgende Analysis.

Es seyen x'', y'' die Coordinaten von m″ und wir wollen überdieß dieselbe Construction und dieselbe Beziehung wie im Vorhergehenden annehmen, indem wir ferner $M'm'' = M'M'' = a''$ setzen.

Dieses vorausgesetzt, hat man, da das Dreyeck AM′M gleichschenklicht ist, $AP' = PM$, und $AP'' = p''M$.

Andrerseits wird man, da die Curve CM'B offenbar ein Kreis ist, dessen Halbmesser AM' ist, zwischen den Coordinaten des Punctes M' diese Beziehung haben

$$X'^2 + Y'^2 = a^2 \ (m);$$

und da der Sinus des Winkels M'MA $= \frac{Y''}{a + a''} = \frac{Y'}{a}$, woraus $Y' = \frac{Y''a}{a + a'}$ erfolgt, weil ferner dessen Cosinus $= \frac{X'}{a} = \frac{X''}{a - a'}$, woraus $X' = \frac{aX''}{a - a'}$ erfolgt, so wird die Gleichung (m) werden

$$\frac{a^2 X''^2}{(a - a')^2} + \frac{a^2 Y''^2}{(a + a')^2} = a^2;$$

oder wie oben

$$Y''^2 + \frac{(a + a')^2}{(a - a')^2} X''^2 = (a + a')^2.$$

Es kann nicht schwer seyn zu beweisen, daß, wie auch der Winkel AM'M beschaffen seyn mag, die Länge der Geraden MN immer gleich 2a ist.

Die jungen Meßkünstler, welche topographische Zeichnungen anfertigen, werden ohne Zweifel mit Vergnügen bemerken, daß die eben aufgelöste Aufgabe unausschließlich die ganze Theorie des Pantographs umfaßt. Die Beschaffenheit und die Gränzen des gegenwärtigen Werks erlauben uns nicht, uns mehr über diese Betrachtungen auszulassen. Wir werden indessen bey einer andern Gelegenheit auf diesen Gegenstand zurückkommen.

Aufgabe.

§. 65.

Durch mehrere gegebene Puncte eine Curve zu führen.

Es seyen Fig. 49.

$\left.\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right\}$ $\left.\begin{matrix}\alpha'\\ \beta'\end{matrix}\right\}$ $\left.\begin{matrix}\alpha''\\ \beta''\end{matrix}\right\}$ $\left.\begin{matrix}\alpha'''\\ \beta'''\end{matrix}\right\}$ u. s. w.

die respectiven Coordinaten der gegebenen Puncte

$M, \quad M', \quad M'', \quad M''',$

Auflösung.

Es ist klar, daß weil der Vortrag der Aufgabe keinesweges die Art der Curve angiebt, welche durch die gegebenen Puncte gehen soll, man nach Belieben so viele Auflösungen als man will geben kann, indem man von den Curven Gebrauch macht, welche entweder durch Gleichungen ausgedrückt werden können oder nicht; um uns aber an den am leichtesten anzubringenden Auflösungen zu halten, wollen wir mit Lagrange bemerken: „daß, obgleich der Kreis nach der geraden Linie die am „leichtesten zu beschreibende Curve ist, er es dennoch „nicht in Ansehung seiner Gleichung zwischen den rechtwinklichten Coordinaten ist. Aus diesem Gesichts„puncte kann man diejenigen Curven als die leichtesten „ansehen, deren Gleichung durch eine ganze rationale „Function der Abcisse, wie

$$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots.$$

„ausgedrückt ist. Diese Arten Curven werden über„haupt parabolische genannt, weil man sie als eine „Verallgemeinerung der Parabel ansehen kann, welche „statt findet, wenn die Gleichung nur die drey ersten „Glieder hat. Man hat schon den Gebrauch derselben „in der Theorie der Zerlegung der Gleichungen gesehen „(§. 160. L. C.), und ihre Betrachtung ist immer bey „der Gradation der Curven nützlich; denn man kann „immer eine Curve dieser Art durch so viele Puncte ei„ner vorgelegten Curve als man will gehen lassen, in„dem man nur nöthig hat, so viele unbestimmte Coeffi„cienten A, B, C, D . . . . . zu nehmen, als man „Puncte betrachtet, und diese Coefficienten dergestalt zu „bestimmen, daß die Abcissen und Ordinaten dieser Puncte „gegeben wären. Nun ist klar, daß, die vorgelegte „Curve mag seyn, welche sie wolle, die auf diese Art „gezogene parabolische Curve von derselben um desto „weniger unterschieden seyn wird, je größer die An„zahl der gegebenen Puncte, und je kleiner ihr Abstand „ist.“

In der That hat man in dem gegenwärtigen Umstande zwischen den Coordinaten der Puncte M, M′, M″, M‴, welche zur parabolischen Curve gehören, die Beziehungen:

$$\beta = A + B\alpha + C\alpha^2 + D\alpha^3 + \ldots$$
$$\beta' = A + B\alpha' + C\alpha'^2 + D\alpha'^3 + \ldots$$
$$\beta'' = A + B\alpha'' + C\alpha''^2 + D\alpha''^3 + \ldots$$
$$\beta''' = A + B\alpha''' + C\alpha'''^2 + D\alpha'''^3 + \ldots$$

aus denen man durch die gewöhnliche Elimination vom ersten Grade, die Werthe der Coefficienten A, B, C, D .... bestimmen kann; aber diese Werthe werden mit noch mehrerer Leichtigkeit durch folgendes Verfahren erhalten.

Zieht man in den vorhergehenden Gleichungen die eine von der andern ab, so wird man haben

$$\beta' - \beta = B(\alpha' - \alpha) + C(\alpha'^2 - \alpha^2) + D(\alpha'^3 - \alpha^3) + \ldots$$

$$\beta'' - \beta' = B(\alpha'' - \alpha') + C(\alpha''^2 - \alpha'^2) + D(\alpha''^3 - \alpha'^3) + \ldots$$

$$\beta''' - \beta'' = B(\alpha''' - \alpha'') + C(\alpha'''^2 - \alpha''^2) + D(\alpha'''^3 - \alpha''^3) + \ldots$$

Da diese Reste respectiv durch $\alpha' - \alpha$, $\alpha'' - \alpha'$, $\alpha''' - \alpha''$ theilbar sind, so erhält man zu Quotienten

$$(Q)\begin{cases} \dfrac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha} = B + C(\alpha' + \alpha) + D(\alpha'^2 + \alpha'\alpha + \alpha^2) + \ldots \\ \dfrac{\beta'' - \beta'}{\alpha'' - \alpha'} = B + C(\alpha'' + \alpha') + D(\alpha''^2 + \alpha''\alpha' + \alpha'^2) + \ldots \end{cases}$$

$$\frac{\beta''' - \beta''}{\alpha''' - \alpha''} = B + C(\alpha''' + \alpha'') + D(\alpha'''^2 + \alpha'''\alpha'' + \alpha''^2) + \ldots$$

Die Werthe der Brüche, welche die ersten Theile dieser Gleichungen ausmachen, sind bekannt. Es seyen daher zur Abkürzung

$$\frac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha} = \gamma, \quad \frac{\beta'' - \beta'}{\alpha'' - \alpha'} = \gamma', \quad \frac{\beta''' - \beta''}{\alpha''' - \alpha''} = \gamma'' \ldots$$

Man wird auf diese Art finden

$$(Q')\ \frac{\gamma' - \gamma}{\alpha'' - \alpha} = C + D\,(\alpha'' + \alpha' + \alpha)\ \ldots\ldots$$

$$\frac{\gamma'' - \gamma'}{\alpha''' - \alpha'} = C + D\,(\alpha''' + \alpha'' + \alpha')\ \ldots\ldots$$

Es sey eben so zur Abkürzung

$$\frac{\gamma' - \gamma}{\alpha'' - \alpha} = \delta,\ \frac{\gamma'' - \gamma'}{\alpha''' - \alpha'} = \delta'\ \ldots\ldots$$

so wird man finden

$$\frac{\delta' - \delta}{\alpha''' - \alpha} = D\ \ldots\ldots \text{ und so fort.}$$

Man sieht hieraus, daß die Werthe der Coefficienten A, B, C, D .... erhalten werden, wenn man von diesen letztern ausgeht. Um von dieser Bestimmung ein Beyspiel zu geben, wollen wir annehmen, daß die vorhergehende Gleichung mit $\frac{\gamma' - \gamma}{\alpha'' - \alpha} = C$ beendigt sey, oder, welches dasselbe ist, daß man nur drey gegebene Puncte M, M′, M″ habe, in welchem Falle die vorgelegte Gleichung seyn wird

$$y = A + Bx + Cx^2,$$

und die Quotienten (Q), (Q′) werden sich reduciren auf

$$\frac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha} = B + C\,(\alpha' + \alpha) = \gamma\ \ldots\ (1)$$

$$\frac{\beta'' - \beta'}{\alpha'' - \alpha'} = B + C\,(\alpha'' + \alpha') = \gamma'\ \ldots$$

$$\frac{\gamma' - \gamma}{\alpha'' - \alpha} = C = \delta$$

Substituirt man den Werth von C in die Gleichung (1), so wird man haben,

$$B = \gamma - \delta\alpha' - \delta\alpha.$$

Substituirt man ebenfalls die Werthe von C und von B in die Gleichung

$$\beta = A + B\alpha + C\alpha^2,$$

so erhält man, nachdem reducirt worden

$$A = \beta - \gamma\alpha - \delta\alpha\alpha';$$

setzt man nun diese Werthe von A, B, C in die vorgelegte Gleichung, so wird kommen

$$y = \beta + \gamma(x - \alpha) + \delta(x - \alpha)(x - \alpha').$$

Derselbe Rechnungskunstgriff bey der Bestimmung einer größern Anzahl Coefficienten angewandt, würde auf diese weit ausgedehntere Formel führen, deren Gesetz leicht abzunehmen ist

$$y = \beta + \gamma(x - \alpha) + \delta(x - \alpha)(x - \alpha')$$
$$+ \varepsilon(x - \alpha)(x - \alpha')(x - \alpha'') \ldots$$

Lagrange, welcher diese Auflösung nach Newton beybringt, bemerkt, daß man durch folgende Betrachtung zu einem höhern Grad von Einfachheit gelangen kann.

„Weil, fährt dieser berühmte Geometer fort, y in „β, β', β'' übergehen muß, wenn x die Werthe α, α', „α'' .... annimmt, so ist leicht einzusehen, daß der „Ausdruck von y diese Form haben wird,

$$y = A'\beta + B'\beta' + C'\beta'' + \ldots.$$

„wo die Größen A', B', C' dergestallt in x ausgedrückt

„werden müssen, daß man, wenn $x = \alpha$ gesetzt wird, $A' = 1$, $B' = 0$, $C' = 0$ habe; desgleichen daß man, „wenn $x = \alpha'$ gesetzt wird $A' = 0$, $B' = 1$, $C' = 0$ ... „daß man ferner, wenn $x = \alpha''$ gemacht wird, eben so „$A' = 0$, $B' = 0$, $C' = 1$ .... habe und so fort; wor„aus leicht zu schließen ist, daß die Werthe von A', B', C' diese Form haben müssen

$$A' = \frac{(x - \alpha')(x - \alpha'')(x - \alpha''')}{(\alpha - \alpha')(\alpha - \alpha'')(\alpha - \alpha''')} \ldots\ldots$$

$$B' = \frac{(x - \alpha)(x - \alpha'')(x - \alpha''')}{(\alpha' - \alpha)(\alpha - \alpha'')(\alpha' - \alpha''')} \ldots\ldots$$

$$C' = \frac{(x - \alpha)(x - \alpha')(x - \alpha''')}{(\alpha'' - \alpha)(\alpha'' - \alpha')(\alpha'' - \alpha''')} \ldots\ldots$$

. . . .

„indem man in den Zählern und Nennern so viele Fac„toren nimmt, als die Anzahl der gegebenen Puncte der „Curve ist, weniger eins."

„Dieser letztere Ausdruck von y, obgleich unter ei„ner vom ersten verschiedenen Form, kommt doch auf „denselben zurück, wovon man sich durch den Calcul „überzeugen kann, wenn man die Werthe γ, δ, ε .... „entwickelt, und die Glieder nach den Größen β, β', „β'' .... ordnet; er ist indessen wegen der Einfachheit „der Analysis, auf welcher er gegründet ist, und selbst „durch seine Form, die für den Calcul bequemer ist, vor„zuziehen. Hieraus folgt, daß man in irgend einer aus „mehrern Gliedern zusammengesetzten Reihe so viele da„zwischen liegende Glieder als man will geometrisch con„struiren kann; welches sehr nützlich ist die Lücken aus-

„zufüllen, die sich in Reihen von Beobachtungen oder „Versuchen, oder in den nach Formeln berechneten Tafeln oder in gegebenen Constructionen finden könnten," und hierin besteht die Interpolationsmethode.

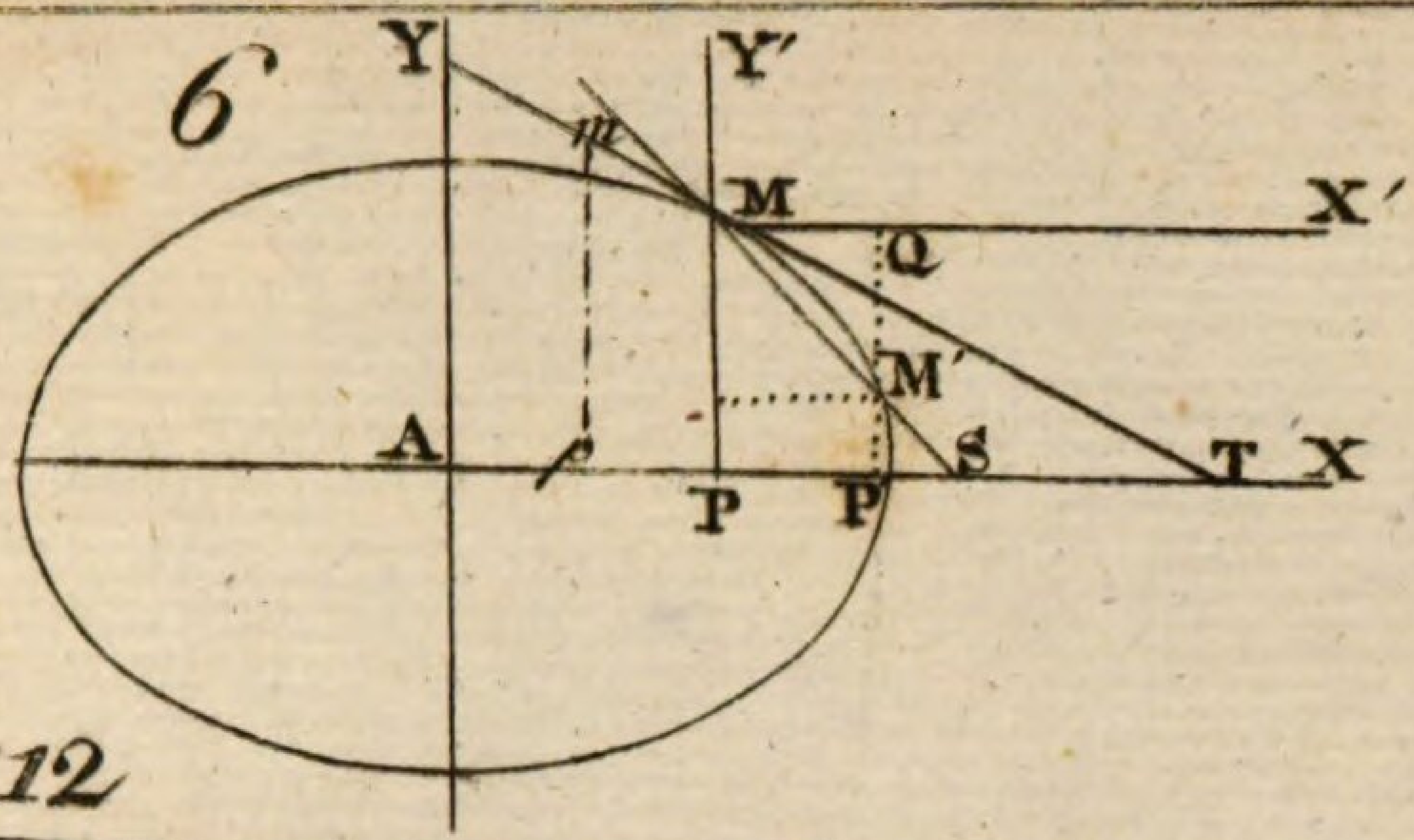
Wir wollen uns nicht mehr bey der Auflösung der Aufgaben der Geometrie aufhalten; was wir davon gesagt haben, ist hinreichend den Lesern zu beweisen, daß man sich vorzugsweise an den allgemeinen Methoden zu halten habe. In der That, sagt Laplace, sind sie, wenn sie unter der einfachsten Form dargestellt sind, fast immer die leichtesten. Diejenigen, welche zum Studium der Sterotomie nach Monge übergehen wollen, können versuchen, einige der vorhergehenden Aufgaben, welche ihre analoge im Raume haben, zu verallgemeinern und aufzulösen; und alsdann haben sie sich vorzüglich an der Gründlichkeit der Analysis und der Einförmigkeit ihres Ganges zu halten.

Ende.

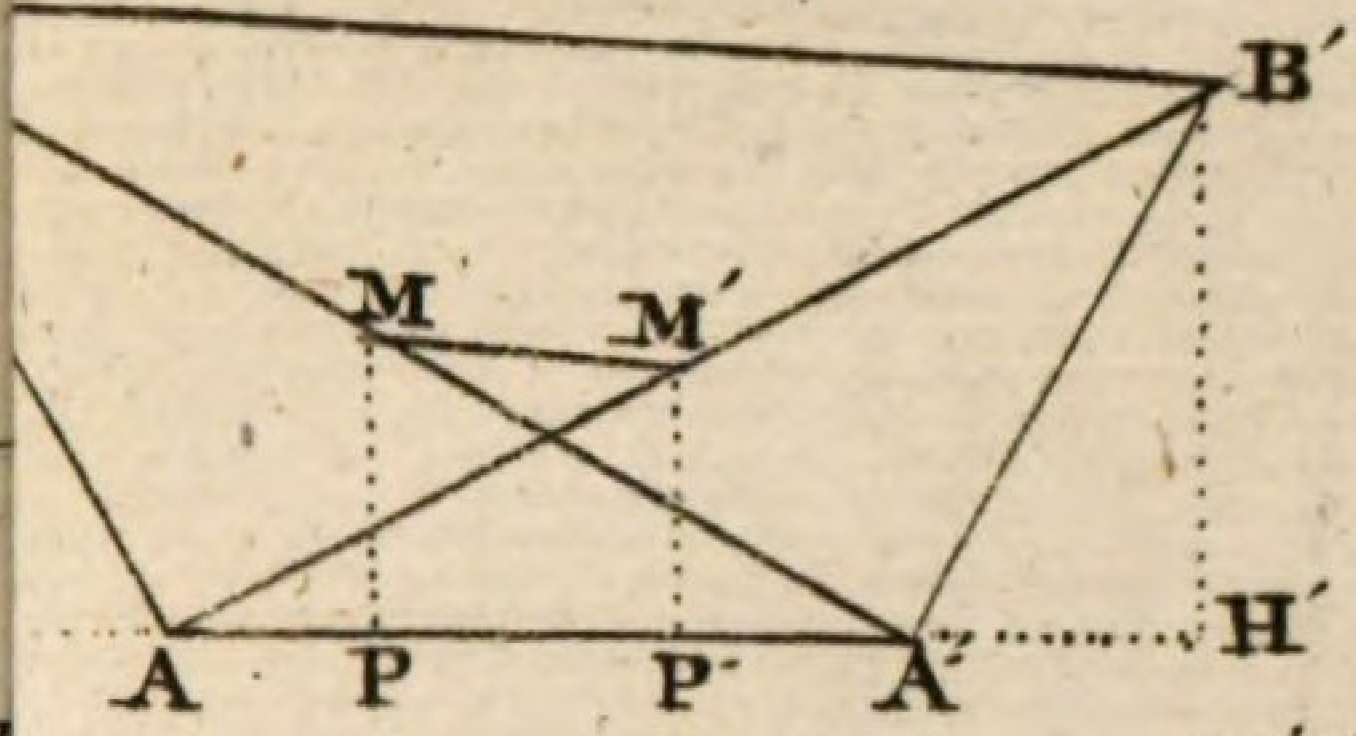
Druckfehler.

Seite 2	Zeile 1	von unten	statt §. 79. lies §. 95.
— 6	— 1	— —	st. analystischen l. analytischen
— 15	— 16		st. dur l. durch
— 16	— 12		st. n l. n'
— 16	— 21		st. 2y l. 2y'
— 35	— 10		st. bekannte l. unbekannte
— 38	— 9		st. $\alpha r'$ l. $\pm \alpha r'$
— 44	— 12		st. den Entfernungen l. der Entfernung
— 71	— 15		st. αt l. at

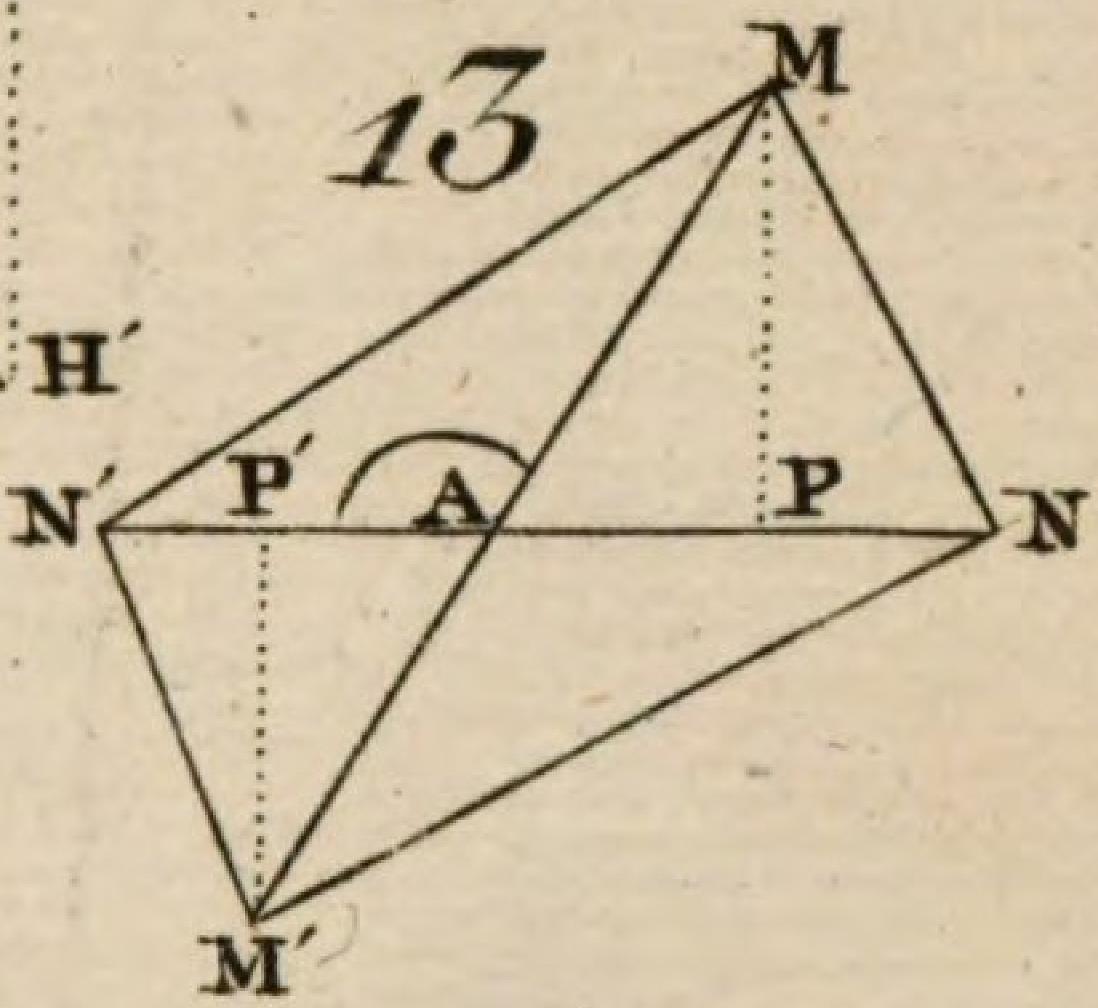
6



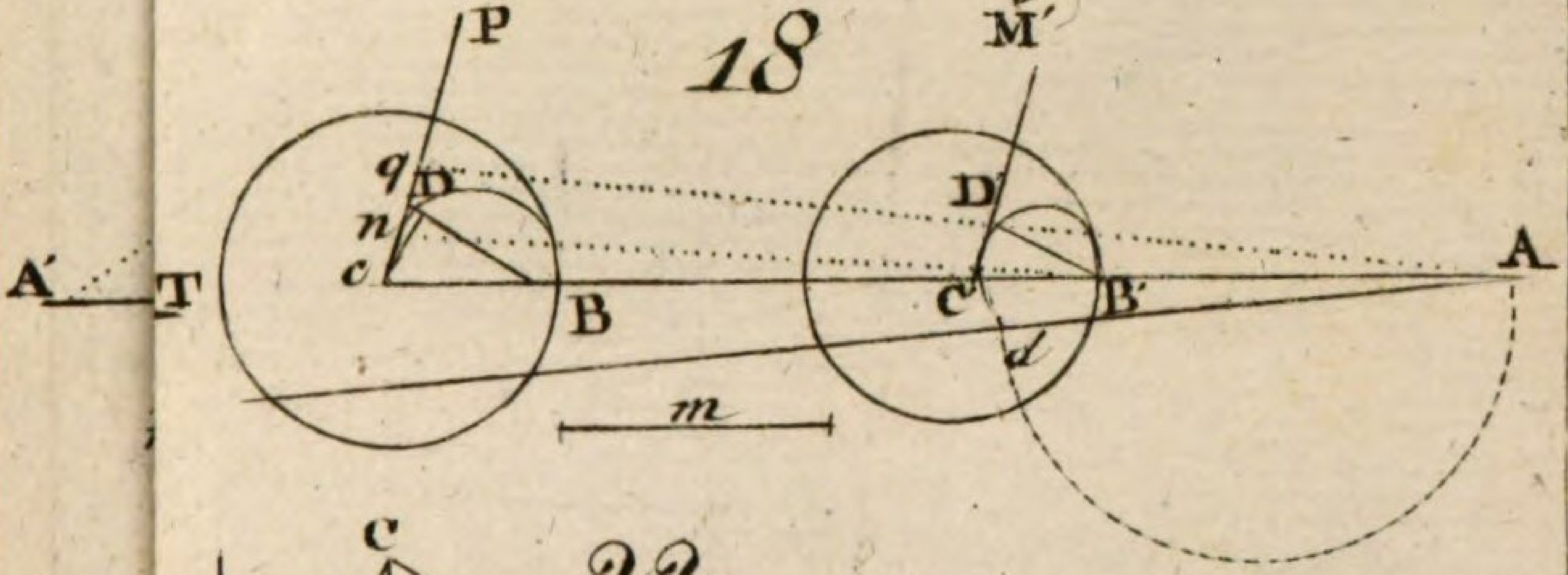
12



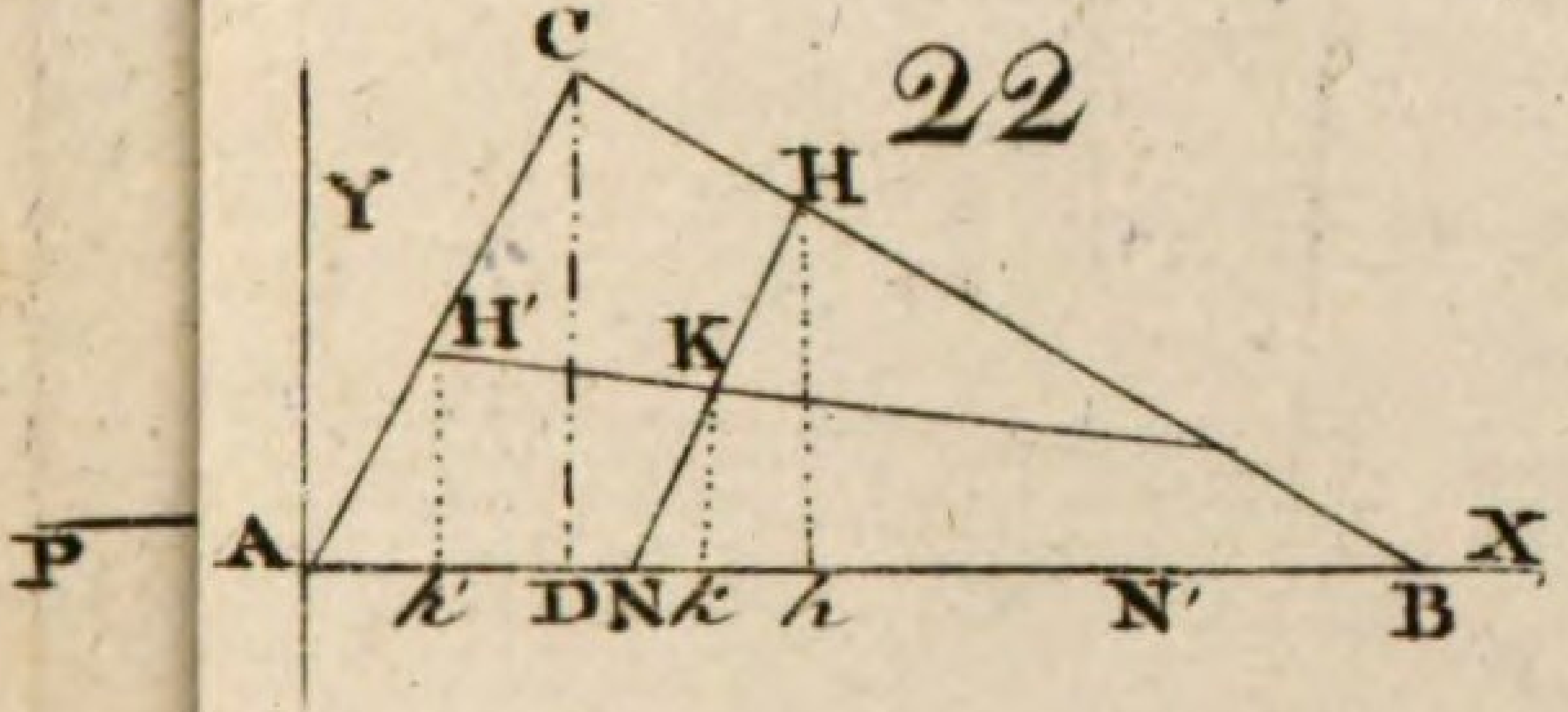
13



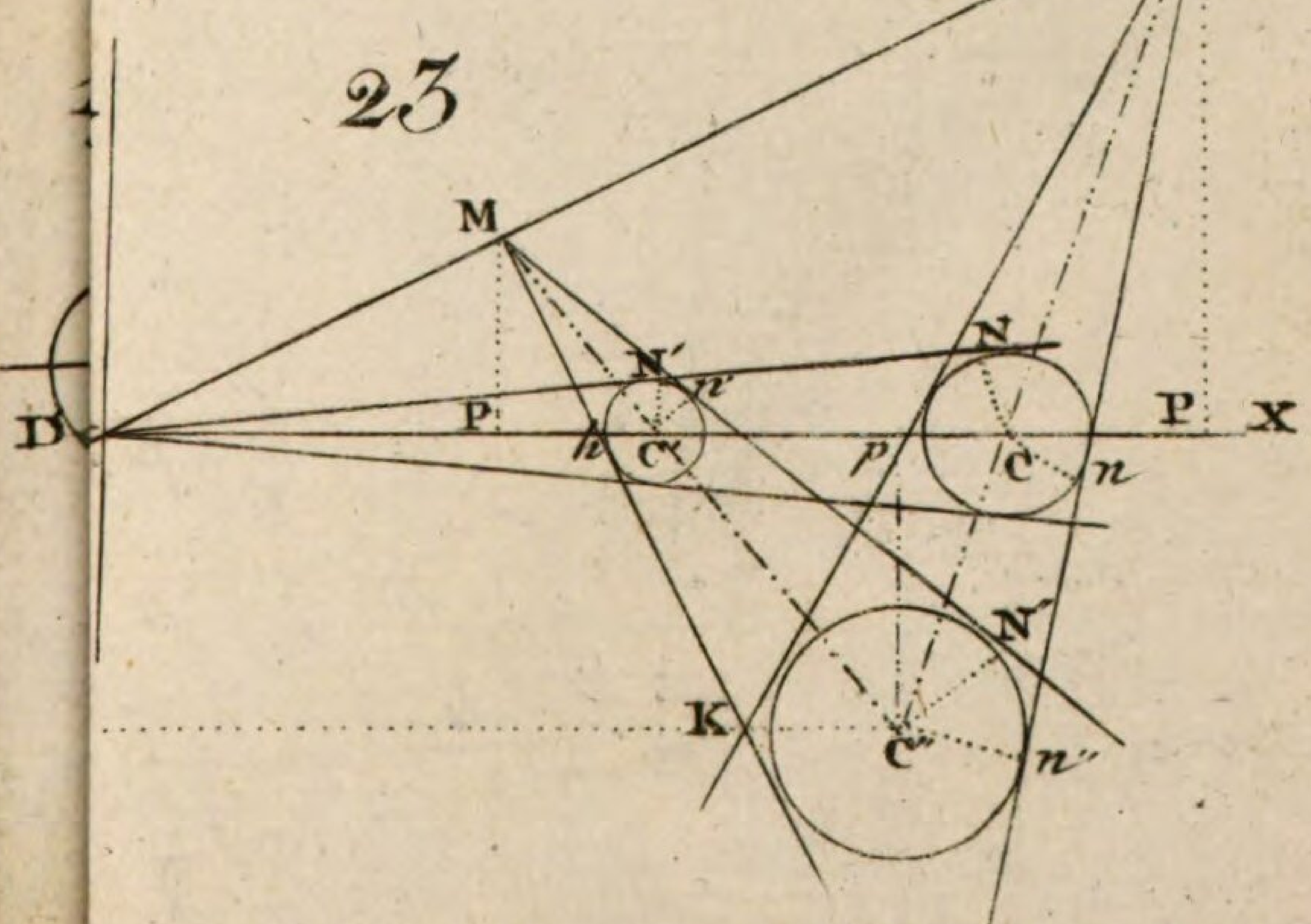
18



22



23



28
29
30
34
35
39
40
44
45
49
50

12.

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Lacroix, S. F.,

Weitere Ausführung zu Lacroix's Geometrie

Berlin 1806

Math.p. 268 d
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082205-5